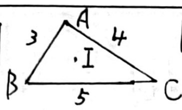
新竹市立成德高級中學 115 學年度正式教師甄試高中數學科題目試卷

1. 本份試卷**不可使用**計算機。
2. 考試完畢，請交回所有試卷及計算紙並在題目卷右上角寫上准考證號碼。

本試卷共 2 頁

以下答案皆為填充題，無須計算過程，須於答案卷上清楚書寫答案。答案須化為**最簡分數**或**有理化**，答案須**完全正確**才給分。

第一部份　填充題（每題 6 分），共 60 分

$\boxed{1}$  $P=I:\ \alpha+\beta = \frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$, $P=B$ or C $\alpha+\beta=1$

1. 在ΔABC中，$\overline{AB}=3,\ \overline{AC}=4,\ \overline{BC}=5$，$I$為$\Delta ABC$的內心，$P$為$\Delta IBC$（包括邊界)內的一點，若

2026.5.25(一) 悼 R.I.P.

$\frac{7}{12}$ $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ $(\alpha,\beta\in R)$，則$\alpha+\beta$的最小值為______________。

~5.30(六) Ru

2. 分別執行A、B兩個伯努利試驗(Bernoulli trial)，每次成功機率依序分別為a、b。若各執行n次，得A

$(\frac{5}{21},\frac{1}{21})$ 的成功次數期望值恰為B的5倍、A的成功次數標準差恰為B的2倍，求$(a,b)=$_______。

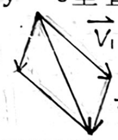
$\boxed{2}$ $\frac{na}{nb}=5 \wedge \frac{na(1-a)}{nb(1-b)}=4 \Rightarrow 5-25b=4-4b \Rightarrow (\frac{5}{21},\frac{1}{21})$

3. 坐標平面上有一平行四邊形Γ，其中兩邊所在的直線與$5x-2y=0$平行、另兩邊所在的

54

直線與$8x-7y=0$垂直。令Γ的兩對角線交點為Q。已知Γ有一頂點P，滿足$\overrightarrow{PQ}=(5,-1)$，

則Γ的面積為

$\boxed{3}$  $\vec{v}_1=(8,-7)$ $\vec{v}_2=(-2,-5)$ $(t\vec{v}_1+\vec{v}_2)\parallel(5,-1) \Rightarrow t=-1$ $\Rightarrow \left|\begin{vmatrix}-8 & 7\\ -2 & -5\end{vmatrix}\right|=54$

4. 在空間中，6個平面E_1：$2x+y+z=0$、E_2：$2x+y+z=1$、E_3：$x+2y+z=0$、

1

E_4：$x+2y+z=2$、E_5：$x+y+2z=1$、E_6：$x+y+2z=3$所圍成的平行六面體體積為_______。

$\boxed{4}$ $X'=AX:\ \begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \Rightarrow X=A^{-1}X' \Rightarrow V=\frac{1}{|\det(A)|}\Delta x'\Delta y'\Delta z'=\frac{1}{\left|\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}\right|}\cdot1\cdot2\cdot2=1$

5. 甲乙兩人比賽桌球，約定比賽進行到打滿6局或有一人比另一人多贏2局時，比賽即終止。設每局均無

$\frac{97}{32}$ 平局，已知甲在每局中獲勝的機率均為$\frac{1}{4}$，且各局勝負互不影響。求比賽結束時，已賽局數的期望值

$\frac{97}{32}$ 為 甲甲 or 乙乙

$\boxed{5}$ $\frac{1}{16}+\frac{9}{16}=\frac{5}{8}$ 　甲乙 or 乙甲 | 甲甲 or 乙乙 $\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8}=\frac{15}{64}$ 　甲乙 or 乙甲 | 甲乙 or 乙甲 $(\frac{3}{8})^2=\frac{9}{64}$ 　$\frac{40\cdot2+15\cdot4+9\cdot6}{64}$

6. 設函數$y=\dfrac{\sin 2x-3}{\sin x+\cos x-2}$的最大值為$M$，最小值為$m$，則$M-m=$______________。　$=\frac{97}{32}$

$2\sqrt{2}$

$\boxed{6}$ 令$t=s+c$ 　$\frac{t^2-4}{t-2}=t+2\in[-\sqrt{2}+2,\sqrt{2}+2] \Rightarrow 2\sqrt{2}$

7. 設x為正數，已知$f(x)=x^2+2x+3+\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2}$，求$f(x)$最小值為____________。

$3(\sqrt[3]{16})+3(\sqrt[3]{4})+3$ 　$\boxed{7}$ $x^2+\frac{4}{x}+\frac{4}{x}+x+x+\frac{4}{x^2}+3 \geq 3(2^{\frac{4}{3}}+2^{\frac{2}{3}}+1)$ "=" 成立 $x^3=4$

8. 坐標平面上，有一P點先以原點O為中心逆時針旋轉70°，再對直線L：$(\sqrt{3}-1)x-(\sqrt{3}+1)y=0$做鏡

160° 射，其結果相當於P點直接對於直線M：$y=(\tan\theta)x$做鏡射，其中$0^\circ\leq\theta\leq180^\circ$，求$\theta$之度數為_______。

$\boxed{8}$ $\begin{bmatrix}\cos2\beta & \sin2\beta\\ \sin2\beta & -\cos2\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}=M(\frac{2\beta-\alpha}{2})$ 　$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3}=\tan15^\circ$

$\frac{30^\circ-70^\circ}{2}=-20^\circ \Rightarrow 160^\circ$

9. 在數列$\langle a_n \rangle$中，當$1 \le n \le 5$時，$a_n = n^2$，且對所有正整數n，$a_{n+5}+a_{n+1}=a_{n+4}+a_n$均成立，則$a_{2031}=$______。

17 $\boxed{9}$ $a_6 = 26-4$　$a_7 = 26-9$　$a_8 = 26-16$　$a_9 = 26-25$　$a_{10} = 4$　$a_{11} = 9$　$a_{12} = 16$　$a_{13} = 25$　$a_{14} = 26-4$

$2031-5 \to 2026 \equiv 2 \pmod 8 \Rightarrow 17$

10. 設x為實數，試解$2^x+4^x+8^x=39$，$x=$____________。

$\log_2 3$ $\boxed{10}$ 令$t=2^x \Rightarrow t^3+t^2+t-39=0$

$$\begin{array}{r|l} 1+1+1-39 & 3 \\ +)\ \ +3+12+39 & \\ \hline 1+4+13+0 & \end{array}$$

$\Rightarrow 2^x=3 \Rightarrow x=\log_2 3$

第二部份　填充題（每題 8 分），共 40 分

1. 請問數列$\left[\frac{1^2}{2026}\right], \left[\frac{2^2}{2026}\right], \left[\frac{3^2}{2026}\right], \cdots, \left[\frac{2026^2}{2026}\right]$中共有________個相異整數。

1520 $\boxed{1}$ $\Delta = \frac{(n+1)^2}{2026} - \frac{n^2}{2026} = \frac{2n+1}{2026}$

$\frac{2n+1}{2026} < 1 \Rightarrow n \le 1012$

当$\Delta<1$：整数值会连續且重複出現

当$\Delta>1$：整数值皆不重複

$a_{1012} = \left[\frac{1012 \cdot 1012}{2026}\right] = 505$

$0 \sim 505$, $a_{1013} \sim a_{2026}$

$506 + 1014 = 1520$

2. 已知a,b是正實數，若方程式$x^2+2ax+16b=0$和$x^2+2bx+2a=0$均有實數根，則a^2+b^2的最小值為______。

80 $\boxed{2}$ $\begin{cases} a^2 \ge 16b \\ b^2 \ge 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a^2 \ge 16 \cdot \sqrt{2a} \Rightarrow a^3 \ge 8^3 \\ b^2 \ge 2 \cdot 4\sqrt{b} \Rightarrow b^3 \ge 4^3 \end{array}$

$64+16=80$

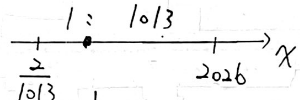
3. 試求級數$\sum_{n=1}^{2026}(-1)^n \frac{n^2+n+1}{n!}$之值為

$-1+\frac{2027}{2026!}$ $\boxed{3}$ $\sum_{n=1}^{2026}\left((-1)^n\left(\frac{n}{(n-1)!}+\frac{n+1}{n!}\right)\right) = \frac{-1}{0!}+\frac{2}{1!}-\frac{3}{2!}\cdots+\frac{2026}{2025!}+\left(\frac{-2}{1!}+\frac{3}{2!}-\frac{4}{3!}\cdots-\frac{2026}{2025!}+\frac{2027}{2026!}\right) = -1+\frac{2027}{2026!}$

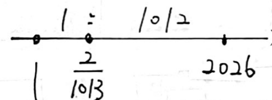
4. 設複數z滿足$\frac{2026z-4}{z-2026}=1-\sqrt{3}i$，則$|z|=$

2 法1:

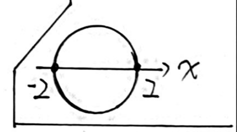
$\boxed{4}$ $2|z-2026| = 2026\left|z-\frac{4}{2026}\right|$



$\frac{1}{1014}(2026+2)=2$



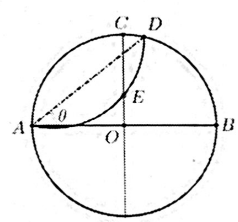
$2026+\frac{1013}{1012}\left(\frac{2}{1013}-2026\right) = 2026 \cdot \frac{(-1)}{1012} + \frac{2}{1012} = -2$



5. 右圖是一張圓形的紙張，半徑為 1，圓心為O，$\overline{AB}$是直徑，$\overline{OC}$是垂直$\overline{AB}$的半徑，E是$\overline{OC}$上一點滿足$\overline{OE}=\frac{1}{3}$，沿某條折線$\overline{AD}$對摺，使得弧$AD$上某一點與$E$重合。

$\frac{3+\sqrt{65}}{14}$

則$\tan\angle OAD=$__________。



$\boxed{5}$

$\overleftrightarrow{AD}: mx-y+m=0$

$O': (0,0) - 2\left(\frac{m}{m^2+1}\right)(m,-1)$

$= \left(\frac{-2m^2}{m^2+1}, \frac{2m}{m^2+1}\right)$ 代入

$E(0,\frac{1}{3})$

$L: 3x+y=\frac{-4}{3}$

$M\left(\frac{-3}{6},\frac{1}{6}\right)$ $\Rightarrow -9m^2+3m=-2(m^2+1)$

$\Rightarrow 7m^2-3m-2=0$

$\Rightarrow m=\frac{3+\sqrt{65}}{14}$

試題結束

$\boxed{4}$ 法3 反演

$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = r^2$

$= 2026 \cdot \frac{4}{2026}$

$\Rightarrow r=2$

$\boxed{4}$ 法2

$|a+bi-2026| = |1013(a+bi)-2|$

$\Rightarrow (a-2026)^2+b^2 = (1013a-2)^2+(1013b)^2$

$(1013^2-1)|z|^2 = 2026^2-4 = 4(1013^2-1)$

$\Rightarrow |z|=2$