臺中市立臺中第二高級中等學校

115 學年度　第 2 次教師甄選　數學科 試題

計_1_張_2_面

一、填充題：

1. 空間中兩單位向量$\vec{a}$、$\vec{b}$，且$|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{2}{3}$，則$\lim_{x\to 0}\frac{|\vec{a}+x\vec{b}|-|\vec{a}|}{x}$的值為____________。

2. 在空間中，已知點$P(15,-14,23)$及直線$L:\frac{25-x}{15}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-18}{11}$，若點$Q$、$R$在直線$L$上並使$\overline{QP}:\overline{QR}=1:2$且$\angle PQR=60^\circ$，則$R$點坐標為____________。(兩解)

3. 求$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+2x^2+1})$=____________。

4. 有 9 個球，其中 2 個紅球，3 個黃球，4 個白球，現在每次取一球，取後不放回，直到球取完為止，求紅球不是最早取完，也不是最後取完的機率為____________。

5. 設m為十進位制的正整數，已知m的各個位數的乘積等於$m^2-20m-19$，試求m的所有可能值為____________。

6. 坐標空間中有三個彼此互相垂直之向量$\vec{u},\vec{v},\vec{w}$。已知$\vec{u}-\vec{v}=(-2,-3,0)$且$\vec{v}-\vec{w}=(3,1,2)$。則由$\vec{u},\vec{v},\vec{w}$所張出之平行六面體的體積為____________。

7. 小明有依序編號 1 至 2026 的不公正硬幣，1 號硬幣出現正面的機率為 1，反面為 0；2 號硬幣出現正面的機率為$\frac{1}{2}$，反面為$\frac{1}{2}$；3 號硬幣出現正面的機率為$\frac{1}{3}$，反面為$\frac{2}{3}$，依此類推，2026 號硬幣出現正面的機率為$\frac{1}{2026}$，反面為$\frac{2025}{2026}$。小明從有一元開始，依序 1 至 2026 號投擲硬幣，每次投擲時如果出現正面則錢變為原來兩倍，如果出現反面則錢保持不變。如果小明依序 1 至 2026 編號投擲完硬幣，請問小明會有多少錢的期望值為____________。

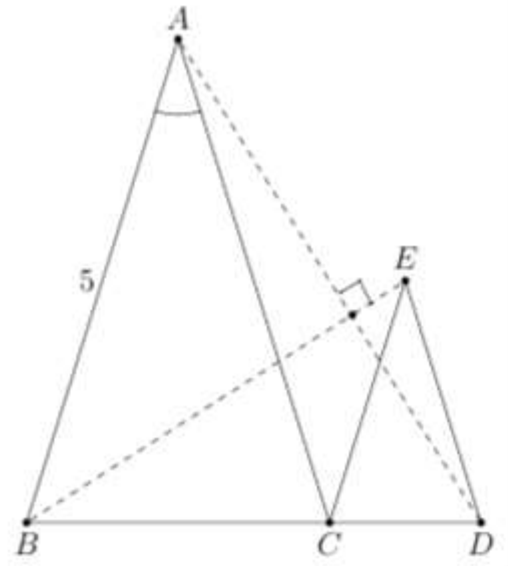
8. 多項式$f(x)=x^3-6x^2-5x+4$，假設a跟b為實數，對所有的實數n使得$bf(a)=f(a-n)+f(a+n)$皆成立。試求出$f(a)$=____________。

9. 將 5 個X和 3 個Y及 2 個Z任意排列，我們將連續的最大串的相同符號定義為一個連串，例如: $\underline{XX}$ $\underline{YY}$ $\underline{XXX}$ $\underline{Y}$ $\underline{ZZ}$當中的第一個連串是$\underline{XX}$，再$\underline{YY}$，然後$\underline{XXX}$，然後$\underline{Y}$，最後是$\underline{ZZ}$ 總共連串個數為 5，而$\underline{ZZ}$，$\underline{Y}$，$\underline{X}$，$\underline{Y}$，$\underline{XXX}$，$\underline{Y}$，$\underline{X}$ 的連串個數為 7，則 5 個X和 3 個Y及 2 個Z任意排列後，連串個數為 4 的機率為____________。

10. 設$m,h\in\mathbb{R}$，$(x-m)^2=4(y-mh)$ 圖形沿著直線$y=mx$平移後產生新的圖形，新舊兩個圖形交點為$P(5,3)$，舊圖形在P點的切線斜率為m_1，新圖形在P點的切線斜率為m_2，且$m_1+m_2=1$，試求m值為________。

二、 計算證明題

11. 設ΔABC及ΔECD為兩相似等腰三角形，有共同頂點C，其中B,C,D三點共線且頂點A,E在線段$\overline{BD}$的同側，如右圖。設$\overline{AB}=5$，在滿足$\overline{AD}\perp\overline{BE}$的條件下，當$\angle BAC$有最大的可能時，求出此時$\Delta ABC$及$\Delta ECD$的面積和為何？



12. 方程式$x^{10}+(115x-1)^{10}=0$有10個複數根：$r_1,\overline{r_1},r_2,\overline{r_2},r_3,\overline{r_3},r_4,\overline{r_4},r_5,\overline{r_5}$，其中$\overline{r_k}$是$r_k$的共軛複數$(k=1,2,3,4,5)$，試求$\frac{1}{r_1\overline{r_1}}+\frac{1}{r_2\overline{r_2}}+\frac{1}{r_3\overline{r_3}}+\frac{1}{r_4\overline{r_4}}+\frac{1}{r_5\overline{r_5}}$的值。

13. 在ΔABC之三邊$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$上分別取點D、E、F，使得$\overline{AF}=\overline{FD}=9$，$\overline{CF}=\overline{FE}=12$。設$\Delta BDE$之外接圓圓心為$O$，已知$\overline{OF}=15$，則$\Delta BDE$之外接圓半徑為多少？

14. 求以下極限之值$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n}^{4n}\frac{n^3+k^3}{n^2k^2}$為多少？

15. 已知橢圓Γ的中心為原點，長軸平行於x軸，正焦弦長為$\frac{9}{2}$，而且兩焦點的距離為$2\sqrt{7}$。若Γ在第二象限內有一點P，過P點之切線交x軸於A點，過P點之法線交x軸於B點，並且滿足$\overline{AP}=\overline{BP}$，則$P$點之坐標為何？