

# 國立嘉科實驗高級中學

## 115學年度高中部教師甄選

### 數學科 試題

#### 作答注意事項

1. 本試題共兩部分：測驗題及非選擇題，共計 100 分。
2. 選擇題請用 **2B** 軟心鉛筆在答案卡劃記，非選擇題限用藍色、黑色原子筆或鋼筆在答案本上作答，但繪圖時得使用黑色鉛筆。
3. 本科不可以使用電子計算器。

凡答用

一、填充題（每題 7 分，共 56 分）

1. 設  $a, b, c$  皆為正實數，且滿足下列各式

$$a + \frac{2}{b} = 5, b + \frac{2}{c} = 4, c + \frac{2}{a} = \frac{5}{2}$$

求  $abc$  的值為\_\_\_\_\_。  $\frac{27 \pm \sqrt{697}}{2}$

2. 已知正整數  $m, n$  滿足  $n = \sqrt{m - 184} + \sqrt{m + 24}$ ，則當  $n$  有最大值時， $m$  之值為\_\_\_\_\_。 2785

3. 方程式  $x^4 + 2(m - 2)x^2 + (m^2 - 5m + 4) = 0$  有相異 4 實根，求實數  $m$  的範圍為\_\_\_\_\_。  $0 < m < 1$

4. 已知一函數  $f$  的定義域為所有正整數，如果  $f(1) = 2026$ ，且對任意正整數  $n > 1$ ，滿足條件  $f(1) + f(2) + \dots + f(n) = n^2 f(n)$ ，則  $f(2026)$  之值為\_\_\_\_\_。  $\frac{2}{2027}$

5. 從  $1, 2, 3, \dots, 15$  這 15 個正整數中，隨機挑選出三個相異數字  $a, b, c$ ，且滿足  $a < b < c$ 。求  $a$  與  $b$  至少相差 3 且  $b$  與  $c$  至少相差 4 的機率為\_\_\_\_\_。  $\frac{24}{91}$

6. 在  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = \overline{AC} = 2$ ，如果  $\overline{BC}$  邊上有 100 個相異的點  $P_1, P_2, \dots, P_{100}$ ，且設  $a_k = \overline{AP_k}^2 + \overline{BP_k} \cdot \overline{P_kC}$ ，其中  $k = 1, 2, \dots, 100$ ，則  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100}$  之值為\_\_\_\_\_。 400

7. 試求級數  $\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{2^k}$  的值為\_\_\_\_\_。  $6 - \frac{n^2 + 4n + 6}{2^n}$

8. 試求  $\cos^2 80^\circ + \cos^2 160^\circ + \cos 80^\circ \cos 160^\circ$  之值為\_\_\_\_\_。  $\frac{3}{4}$

## 二、計算證明題（每題 10 分，共 20 分）

1. 已知  $\triangle ABC$  的外接圓之面積為  $25\pi$ ，令  $a, b, c$  分別為  $\triangle ABC$  的三個頂點  $A, B, C$  所對應的邊長。如果  $a^2 + b^2 = c^2$ ，且  $\sin A$  及  $\sin B$  分別是方程式  $(m+5)x^2 - (2m-5)x + 12 = 0$ （其中  $m > 0$ ）的二根，試求  $m, a, b, c$  的值。  $m = 20, a = 6, b = 8, c = 10$  或  $m = 20, a = 8, b = 6, c = 10$

2. 試問  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{(n+k)\sqrt{nk+k^2}}$  之值為何？ $\sqrt{2}$

### 三、申論題（每題 12 分，共 24 分）

1. 數學學習中的發散思維，強調在解題時應注重不同的解法（即一題多解）  
試請就下面題目給二種不同的證明：

已知  $a, b, c, d$  均為正數，且滿足  $a^2 + b^2 = 1$ ， $c^2 + d^2 = 1$ ，  
試證： $ac + bd \leq 1$

略

2. 在平面向量的研究中，給定一個三角形  $\Delta OAB$ ，我們常以頂點  $O$  為原點，  
將其餘兩頂點的觀測向量標記為  $\overrightarrow{OA}$  與  $\overrightarrow{OB}$ 。現在學生在探究三角形三邊  
之兩兩向量的內積時，觀測並記錄了以下三個數值：

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = x, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BO} = y, \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{OA} = z$$

請根據上述情境，回答下列問題：

(1) 請用給定的  $x, y, z$  來表示  $|\overrightarrow{OA}|^2$  及  $|\overrightarrow{OB}|^2$ 。(6 分)

(2) 試以  $x, y, z$  來表示  $\Delta OAB$  的面積。(6 分)

略