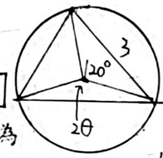
115 建中一招

一 填充題(每題 6 分) 2026.5.13(三)~5.24(日) Ru

1. 已知 z、w 皆為非零複數，且滿足 $|z-2w|=3$，$\frac{z}{w}$ 的主幅角為 $\frac{\pi}{3}$，則 $|z|+|w|$ 的最大值為 $\sqrt{21}$



1 $R=\sqrt{3}$ 法1:

$\sqrt{3}\sin\theta+2\sqrt{3}\sin\left(\frac{240^\circ-2\theta}{2}\right)$

$=\sqrt{3}\left(S+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}C+\frac{1}{2}S\right)\right)$

$=\sqrt{3}(2S+\sqrt{3}C)\le\sqrt{21}$

2. 已知 x、y 皆為正實數，且滿足 $x^3+y^3+3xy=1$，則 x^2y 的最大值為 ________。 $\frac{4}{27}$

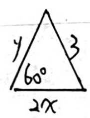
3. 已知數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1=1, a_2=5$，且 $\frac{a_{n+2}+a_n}{a_{n+1}+2}=2$，則 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}}{n^2}$ 的值為 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. 已知△ABC 中，$\angle A,\angle B,\angle C$ 所對應的邊分別為 a,b,c，且 $c=5$，$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$。點 P 為△ABC 內切圓上的動點，d 為點 P 到頂點 A,B,C 距離的平方和，令 d 的最小值與最大值分別為 $d_{\min}, d_{\max}$，則 $d_{\min}+d_{\max}$ 的值為 ________。 40

5. 已知 z 為複數，且 $\frac{z+1}{z-1}$ 是純虛數，則 $|z^2-2z+3|$ 的最小值為 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

6. 已知 $3^{2^{2026}}-1=2^n\cdot m$，且 m 為奇數，則正整數 n 為 ________。 2028

1 法2



$9=4x^2+y^2-2xy$，令 $k=x+y$

$\Rightarrow 4x^2+(k-x)^2-2x(k-x)=9$

$\Rightarrow 7x^2-4kx+k^2-9=0$

$D\ge 0\Rightarrow 4k^2\ge 7(k^2-9)\Rightarrow k\le\sqrt{21}$

7. 在一個 2×7 的格子內填入數字 $a_{i,j}\in\{1,2,3\}$，使其滿足 $a_{i,j}\le a_{i+1,j}$ 且 $a_{i,j}\le a_{i,j+1}$，則相異的填法數共有 ________ 種。 540

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$	$a_{1,5}$	$a_{1,6}$	$a_{1,7}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{2,4}$	$a_{2,5}$	$a_{2,6}$	$a_{2,7}$

2 $x^3+y^3+(-1)^3-3xy(-1)$

$=(x+y-1)\frac{1}{2}\left((x-y)^2+(y+1)^2+(-1-x)^2\right)=0$

$x+y-1=0$ ⇐ 恆正 ↑

$\Rightarrow 1=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+y\ge 3\left(\frac{x^2y}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\Rightarrow\frac{4}{27}$

$21=\frac{7}{3}\cdot 9=\left((x-y)^2+(\sqrt{3}x)^2\right)\left(1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\right)$

1 法3 $\ge(y+x)^2$

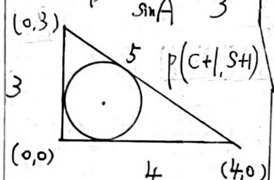
8. 已知 $a\in\mathbb{R}$，且對所有 $k\in[-1,1]$，當 $x\in(0,4]$ 時，$5\ln x+x^2-8x+a\le kx$ 恆成立，則 a 的最大值為 $12-10\ln 2$ ($1.386<\ln 4<1.387$)

4 $\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{\sin B}{\sin A}$

$\Rightarrow\sin(2A)=\sin(2B)$

$\Rightarrow\angle A=90^\circ-\angle B$

$\tan B=\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{4}{3}$



$(C-3)^2+(S+1)^2$

$+(C+1)^2+(S+1)^2$

$+(C+1)^2+(S-2)^2$

$=20-2C\Rightarrow 40$

5 $Z=C+iS$

$\left|Z+\frac{3}{Z}-2\right|$

$|4C-2-2Si|$

$=2\sqrt{(2C-1)^2+S^2}$

$=2\sqrt{3C^2-4C+2}$

$\le 2\cdot\sqrt{\frac{8}{4\cdot 3}}$

$=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

3 $a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}+4$

$b_n=b_{n-1}+4=4+(n-1)4=4n$

$a_1=1$

$a_2=a_1+4\times 1$

+) $a_n=a_{n-1}+4(n-1)$

$a_n=2n(n-1)+1$

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2k^2-2k+1}}{n^2}\to\int_0^1\sqrt{2}x\,dx=\sqrt{2}/2$

$\left(\frac{2(k-\frac{1}{2})^2}{n^2}<\frac{2k^2-2k+1}{n^2}<\frac{2k^2}{n^2}\right)$

the pinching thm ~

6 $\left(3^{2^{2025}}+1\right)\left(3^{2^{2024}}+1\right)\cdots\left(3^{2^1}+1\right)(3+1)(3-1)$

$3^2\equiv 1\pmod 4\Rightarrow 3^{2^k}\equiv(3^2)^{2^{k-1}}\equiv 1\pmod 4$

$\Rightarrow 2025+3=2028$

lifting the exponent lemma

LTE Lemma 提升冪(指數提升)引理

$V_2(x^n-y^n)=V_2(x-y)+V_2(x+y)+V_2(n)-1$

$\Rightarrow V_2(3-1)+V_2(3+1)+V_2(2^{2026})-1$

$V_p(n)$: 滿足 $p^k|n$ 的最大正整數 k

$n=p^k\cdot m$，$\gcd(p,m)=1$，$V_p(n)=k$

7 日

1	1	1	2	2	3
1	2	3	2	3	3
A	B	C	D	E	F

C,D 不共存 $\begin{matrix}1&2\\3&2\end{matrix}$ 不合

寸	有C	有D	C,D
絲	無D	無C	皆無

$C^1_1H^5_6\cdot 2+H^5_7$

$=2\cdot C^{10}_4+C^{10}_3=540$

8 取 $k=-1$，令 $f(x)=x^2-7x+5\ln x$

$f'(x)=0\Rightarrow 2x^2-7x+5=0$

x		1		$\frac{5}{2}$	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

$f(1)=-6$，$f(4)=-12+10\ln 2$

$\Rightarrow\max=12-10\ln 2$

遞減

9 令 $f(x)=x[x[x[x]]]=114$

當 $x\ge 0$，$f(x)$ 為遞增函數，$f(3)=81$，$f(4)=256$

$f(\frac{10}{3})=110$，$f(\frac{11}{3})\fallingdotseq 146$，設 $f(a)=114$，$\frac{10}{3}<a<\frac{11}{3}$

$[a[a]]=10$，$f(a)=a[10a]=114$，$33.\sim<10a<36.\sim$

$\Rightarrow 33\le[10a]\le 36$，又 $[10a]\le 10a=\frac{1140}{[10a]}\Rightarrow[10a]\le\sqrt{1140}\fallingdotseq 33$

$\Rightarrow[10a]=33$，$a=\frac{114}{33}$

$\frac{114}{33}\left[\frac{114}{33}\cdot 10\right]=\frac{114}{33}\cdot 34$ 不合

當 $x\le 0$，$f(x)$ 為 函數

$f(-3)=81$，$f(-4)=256$

$f(-\frac{13}{4})=-\frac{13}{4}(-43)=139.75$

$f(-14/4)=-\frac{14}{4}(-49)=171.5$

設 $f(b)=114$，$-\frac{13}{4}<b<-3$

$f(b)=b[12b]$，而 $-39<12b<-36$

故 $[12b]=-39$ or -38 or -37

而 $-38<[12b]=\frac{114}{b}<-\frac{456}{13}\fallingdotseq-35.1\Rightarrow[12b]=-37$

$\frac{114}{-37}[12b]=114$ ok $\Rightarrow -114/37$

寸 絲

9. 令 $[x]$ 表示「小於或等於實數 x 的最大整數」，則滿足 $x\cdot\left[x\cdot\left[x\cdot[x]\right]\right]=114$ 的所有實數 x 為＿＿＿＿＿。

$\frac{-114}{37}$

10. 設 $x\geq 1$，若函數 $f(x)=x^2-2x-2-16\sqrt{x-1}+x\sqrt{x^2-4x-32\sqrt{x-1}+76}$ 在 $x=x_0$ 時有最小值 m，則實數對 (x_0,m) 為

$\left(\frac{17+\sqrt{17}}{8},-6\right)$ $\boxed{10}$ $x^2+2x\sqrt{R(x)}+x^2-4x-32\sqrt{x-1}+76 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{R(x)}\right)^2-40$ Haw Lee

11. 箱子中有13顆球，編號分別為1,2,3,…,13，現從中隨機取出三顆相異的球，並觀察其編號。假設箱子中的每顆球被取到的機會均等。已知這三顆球編號的乘積為 a，這三顆球編號的總和為 b，則 a 或 b 為完全平方數的機率為

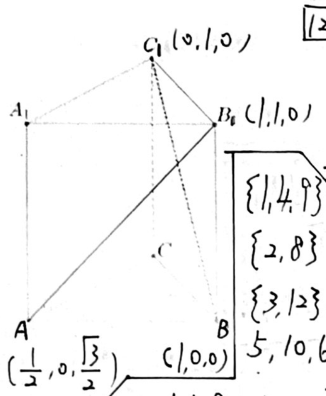
$\frac{45}{286}$

12. 給定一個正三稜柱 $ABC-A_1B_1C_1$，其中 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 皆為正三角形，側面皆為正方形，且所有稜長皆為1，則兩直線 $\overline{AB_1}$ 和 $\overline{C_1B}$ 的距離為

$\frac{1}{\sqrt{5}}$

$=(x-4)^2+(2\sqrt{x-1}-8)^2$

$\boxed{10}$ $R(x)=x^2-8x+16+(2\sqrt{x-1})^2-2(2\sqrt{x-1})\cdot 8+64$



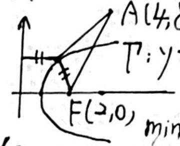
$\boxed{12}$
$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -\sqrt{3} & 1 & 2 & -\sqrt{3} \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}$
$-\sqrt{3}\quad -\sqrt{3}\quad -3$

$\frac{(0,1,0)\cdot(1,1,\sqrt{3})}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

設 $P(x,2\sqrt{x-1}),A(4,8),x\geq 1$

$\begin{cases} y=2\sqrt{x-1} \\ y=4(x-2) \end{cases} \Rightarrow 4x^2-17x+17=0$

$\Rightarrow x=17+\sqrt{17}/8$



$min=\frac{1}{2}(\overline{AF})^2-40=-6$

$\{1,4,9\}$
$\{2,8\}$
$\{3,12\}$
$5,10,6$

$\rightarrow C^3_1C^2_2\cdot 2=6$

含5: $5,10$ $\begin{array}{c}2\\ \text{or}\\ 8\end{array}$ $\rightarrow 2$

不含5: 6 $\begin{array}{c}2\\ \text{or}\\ 8\end{array}$ $\begin{array}{c}3\\ \text{or}\\ 12\end{array}$ $\rightarrow 4$

$\boxed{11}$ $1,4,9\rightarrow 1$ ⑬

36: $\begin{array}{c}13\\12\\11\end{array}$ ① 16: $\begin{array}{cccccccccccccc} 13 & 12 & 11 & & 10 & & 9 & & & 8 & & & 7 & \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 5 & 4 & 6 & 5 & 4 & 7 & 6 & 5 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \end{array}$ ⑭

9: $\begin{array}{ccc} 6 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}$ ③

$(1,3,12)$

$\frac{13+33-1}{286}$

25→17: $\begin{array}{ccccccccccccccc} 13 & 12 & & 11 & & 10 & & 9 & & & 8 & & & 7 & \\ 3 & 4 & 3 & 5 & 4 & 6 & 5 & 4 & 7 & 6 & 5 & 7 & 6 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 4 & 4 \end{array}$ ⑮

C^{13}_3

令 $x'=14-x,\ y'=14-y,\ z'=14-z \Rightarrow x'+y'+z'=42-25=17$

二.計算題

1. 設 x 為實數，若函數 $f(x)=|x-1|+a\cdot|x-b|+3\cdot|x-115|$，其中 a,b 皆為整數且 $1<b<115$。已知 $f(x)$ 的最小值為12

請回答下列各小題。

(1) 設 $a\geq 0$，$f(x)\geq|x-1|+|x-115|\geq 114$ ※

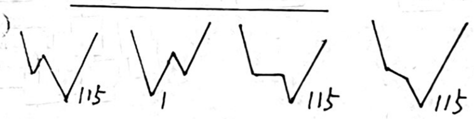
(1) 試證：$a<0$。（4分）

(2) 試求所有滿足題目條件的數對 (a,b)。（10分）

	$x<1$	$1\leq x<b$	$b\leq x<115$	$x\geq 115$
(2) m	$-a-4\leq 0$	$-a-2$	$>$ $a-2$	$a+4\geq 0$

$\Rightarrow -4\leq a<0$

$\Rightarrow$



$(-1,13),(-2,64),(-3,81),(-3,111)$

2. 已知 $p>3$，且 p 為質數，若 $\sum_{n=3}^{p-1}\frac{n^3}{(n-1)(n-2)}=\frac{b}{a}$，其中 a、b 互質，試證：p 為 b 的因數。（14分）

回

$$\begin{array}{r} n+3 \\ n^2-3n+2\,\overline{)\,n^3+0n^2+0n+0} \\ \underline{n^3-3n^2+2n} \\ 3n^2-2n+0 \\ \underline{3n^2-9n+6} \\ 7n-6 \end{array}$$

$\frac{7n-6}{(n-1)(n-2)}=\frac{\square}{n-1}-\frac{\triangle}{n-2}$ ($\square=-1$, $\triangle=-8$)

$\square-\triangle=7$

$-2\square+\triangle=-6$

$\sum_{n=3}^{p-1}\left(n+3-\frac{1}{n-1}+\frac{8}{n-2}\right)$

$=\frac{(p-3)(p+2)}{2}+3(p-3)$

$-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p-2}\right)$

$+8\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{p-3}\right)\right)$

$x=1$: $f(1)=a(b-1)+342=12$

$-330=a(b-1)$

a	$b-1$	b	
-1	330	331	不合
-2	165	166	不合
-3	110	111	ok

$x=115$: $f(115)=a(115-b)+114=12$

$-102=a(115-b)$

a	$115-b$	b
-1	102	13
-2	51	64
-3	34	81

$=(p^2-p)\cdot\frac{1}{2}+3p+p\left(\frac{1}{2(p-2)}+\frac{1}{3(p-3)}+\cdots+\right)$

$+8p\left(\frac{1}{3(p-3)}+\frac{1}{4(p-4)}+\cdots\right)-3-9+8+4$

$=\frac{p\cdot g}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(p-2)}$，$g\in\mathbb{Z}$ ∵ p 為質數 ∴ $p\mid b$

Created with Scanner Pro