12. 設實係數多項式 $f(x)=ax^3+bx^2-cx-d$，已知方程式 $f(x)=0$ 的三個根分別為 $\cos\frac{2\pi}{7}$、$\cos\frac{4\pi}{7}$、$\cos\frac{6\pi}{7}$，則

44

$20\log_2 a-2\log_2 b-6\log_2 c-12\log_2 d=$ ______。

$\boxed{12}$ $0=z^7-1=(z-1)(z^6+z^5+\cdots+1)=0$

法1: $\Rightarrow z^3+z^{-3}+z^2+z^{-2}+z+z^{-1}+1=0$

令 $z=\cos\frac{2\pi}{7}$

$z+z^{-1}=2\cos\frac{2\pi}{7}=2x$

$z^2+z^{-2}=2\cos\frac{4\pi}{7}=4x^2-2$

$z^3+z^{-3}=2x(4x^2-3)$

$=8x^3-6x$

$\Rightarrow 8x^3+4x^2-4x-1=0$

$(a,b,c,d)=(8,4,4,1)$

$\Rightarrow 60-4-12=44$

法2: $\cos3\theta=\cos4\theta$

$(3\theta+4\theta=2\pi)$

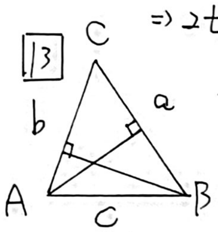
13. $\triangle ABC$ 中，若 $2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ 且 $\cos C=\frac{2}{\sqrt{13}}$，則 $\tan A=$ ______。

$1+\sqrt{3}$

$2bc\cos A=ac\cos B$

$\Rightarrow 2\tan B=\tan A$

$\boxed{13}$



$\tan A+\tan B+\tan C$

$=\tan A\tan B\tan C$

$3t+\frac{3}{2}=t\cdot2t\cdot\frac{3}{2}$

$\Rightarrow 2t^2-2t-1=0$

$\Rightarrow 2t=\frac{2+2\sqrt{3}}{2}=1+\sqrt{3}$

$\cos A,\cos B,\cos C$ 皆 >0

銳角△

14. 設 a、b、c 為實數且滿足 $\begin{cases}0\le a+b+c\le4\\-2\le4a+2b+c\le2\\-4\le9a+3b+c\le0\end{cases}$。若 $a-2b+4c$ 的最大值與小值分別 M 與 m，則數對 (M,m) 為

$(112,-72)$

令 $f(x)=ax^2+bx+c$

$\boxed{14}$ $=f(1)\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}+f(2)\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}+f(3)\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$

$4f(-\frac{1}{2})=\frac{35}{2}f(1)-21f(2)+\frac{15}{2}f(3)$, $M=\frac{35}{2}\cdot4-21(-2)+\frac{15}{2}\cdot0=112$

$m=\frac{35}{2}\cdot0-21\cdot2+\frac{15}{2}(-4)=-72$

15. 設 x、y 為兩實數，若 $x^2+2xy+2y^2=1$，則 x^2+y^2 的最大值為______。

$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 令

$\boxed{15}$ $x=r\cos\theta$

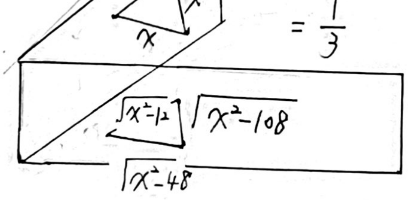
$y=r\sin\theta$

$r^2=\frac{1}{1+\sin2\theta+\frac{1-\cos2\theta}{2}}\le\frac{1}{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

16. 空間中有四個平面：$E_1:x+y+z=0$、$E_2:x+y+z=6$、$E_3:x+y+z=18$、及 $E_4:x-y+z=0$，若在平面 E_4 上有一正三角形 ABC，而點 A、B、C 也分別在平面 E_1、E_2、E_3 上，則 ΔABC 的面積為______。

$\frac{63\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{16}$



$\cos\theta=\frac{(1,1,1)\cdot(1,-1,1)}{3}$

$=\frac{1}{3}$

$\cos\varphi=\frac{x^2+48}{2\sqrt{x^2-12}\sqrt{x^2-48}}$

$A'=A\cos\theta$

$\frac{1}{4}\sqrt{3x^4-336x^2}=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\cdot\frac{1}{3}$

$\Rightarrow 8x^4=336\cdot3x^2\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot42\cdot3=\frac{63\sqrt{3}}{2}$

臺中市立臺中女子高級中等學校 115 學年度第一次教師甄選 數學科 試題

二、計算證明題（須詳細寫出計算過程，共 20 分）

1. 設 a、b、c、d 為實數且 $a \neq b$，$c \neq d$，$f(x)$、$g(x)$ 為滿足 $f(a)=f(b)$ 及 $g(c)=g(d)$ 的實係數二次多項式。已知 $f(x)-g(x)$ 為常數多項式，試證明：

令 $f(x)=Ax^2+Bx+C$ 对称軸 $x=\frac{-B}{2A}=\frac{a+b}{2}=\frac{c+d}{2}$

(1) $a+b=c+d$。(4 分)

(1) $g(x)=Ax^2+Bx+D$

(2) $\dfrac{f(a)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{g(c)-g\left(\frac{c+d}{2}\right)}=\left(\dfrac{a-b}{c-d}\right)^2$。(8 分)

(2) 令 $f(x)=A(x-h)^2+k_1$
$g(x)=A(x-h)^2+k_2$

$h=\frac{a+b}{2}=\frac{c+d}{2}$

$$\frac{f(a)-k_1}{g(c)-k_2}=\frac{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2}{\left(c-\frac{c+d}{2}\right)^2}=\frac{(a-b)^2}{(c-d)^2}$$

2. 試問方程式 $x+\sqrt{12+8(\log_4 x^2)-4(\log_4 x^2)^2}=1$ 共有幾個不同的實根？(8 分) 3个

法1: $4(3+2\log_2|x|-(\log_2|x|)^2)$

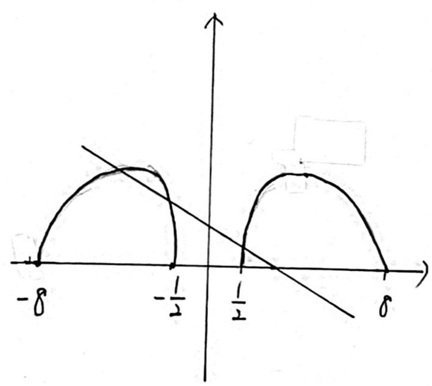
$=4(4-(\log_2|x|-1)^2)\geq 0$

$\Rightarrow (\log_2|x|+1)(\log_2|x|-3)\leq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\leq |x|\leq 8$

$\Rightarrow x\in\left[\frac{1}{2},8\right]\cup\left[-8,-\frac{1}{2}\right]$

$$\begin{cases} y=\dfrac{1-x}{2} \\ y=\sqrt{-(\log_2|x|+1)(\log_2|x|-3)} \end{cases}$$



法2:

令 $y=\log_2|x|$ $\quad 16-4(y-1)^2=(1-x)^2 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$

$1-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 1$，在 $x\leq 1$ 時有3个交点