准考證號：

臺中市立臺中女子高級中等學校115學年度第一次教師甄選 數學科 試題

說明：1.作答時，請將答案填入答案卷內。 2026.4.7(二)～4.20(一) Ku

2.請利用試題卷空白處計算，不另提供計算紙。

(單旅 4.14～4.17)

一、填充題（每題5分，共80分）

1. 有大小相同的紅球、白球、黑球各7顆，若任意取出7顆球來排成一列，規定任兩顆紅球均不相鄰，則共有 1224 種不同的排法。

$\boxed{1}$

法1:

紅球個數			
0	2^7	$=128$	
1	$2^6\cdot C^7_1$	$=448$	
2	$2^5\cdot C^6_2$	$=480$	1224
3	$2^4\cdot C^5_3$	$=160$	
4	$2^3\cdot C^4_4$	$=8$	

法2: 令 $f(n)$ = 長度為 n 的排法 $f(1)=3$, $f(2)=3^2-1=8$

$\underline{\quad\quad}_{\,n-1}\ \underline{非R}_{\,n}$ $\quad f(n)=2f(n-1)+2f(n-2)$

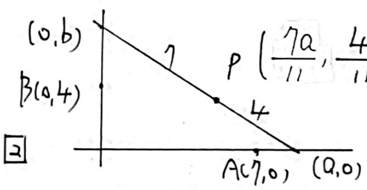
$\underline{\quad\quad}\ \underline{\quad}_{\,n-1}\ \underline{R}_{\,n}$

n	1	2	3	4	5	6	7
$f(n)$	3	8	22	60	164	448	1224

2. 坐標平面上，O 為原點、$A(7,0)$、$B(0,4)$，M、N 分別為 x 軸與 y 軸正向上的動點。若 P 在 $\overline{MN}$ 上，$\overline{PM}=4$ 且 $\overline{PN}=7$，則四邊形 $OAPB$ 面積的最大值為 $14\sqrt{2}$。

$a^2+b^2=11^2$

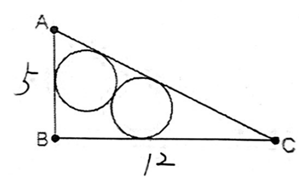
$\boxed{2}$



$P\left(\frac{7a}{11},\frac{4b}{11}\right)$ $\quad 14+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 7 & -4 \\ \frac{7a}{11} & \frac{4b}{11}-4 \end{vmatrix} = \frac{14}{11}(a+b)=14(\cos\theta+\sin\theta)$

$\leq 14\sqrt{2}$

3. 如右圖，直角三角形 ABC 中，$\angle B=90°$，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=12$，有兩個大小相同的圓彼此相切，且各自跟三角形 ABC 的斜邊及一股也相切，則兩圓的外公切線段長為 $\frac{52}{17}$。

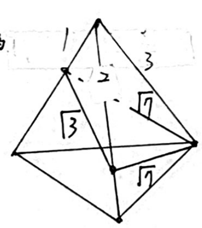


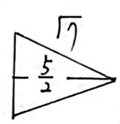
$\boxed{3}$ $\frac{12}{5}=\frac{2t}{1-t^2}$ $\quad \frac{5}{12}=\frac{2t}{1-t^2}$ $\quad \frac{17r}{2}=\frac{r}{\frac{2}{3}}+\frac{r}{\frac{1}{5}}+2r=13 \Rightarrow 2r=\frac{52}{17}$

$\Rightarrow 6t^2+5t-6=0$ $\begin{matrix}3 & -2\\ 2 & +3\end{matrix}$ $\quad \Rightarrow 5t^2+24t-5=0$ $\begin{matrix}5 & -1\\ 1 & +5\end{matrix}$

4. 空間中有相異四點 A, B, C, D，滿足 $\overline{AB}=1$，$\overline{AC}=2$，$\overline{AD}=3$。若 $\angle BAC=60°$，$\angle CAD=60°$，$\angle DAB=60°$，則點 A 到平面 BCD 的距離為 $\frac{2\sqrt{6}}{5}$。

$\boxed{4}$





$\left(\frac{\sqrt{2}}{12}\cdot 3^3\right)\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{4}h$

$\Rightarrow h=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

5. 設兩數列 $\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$ 的首項分別為 $a_1=5$、$b_1=1$，且 $a_{n+1}=a_n+2b_n$，$b_{n+1}=2a_n+b_n$，n 為任意正整數，則一般項 $a_n=$ $3^n-2(-1)^n$。

$\boxed{5}$

$a_n+b_n=3(a_{n-1}+b_{n-1})=3^{n-1}\cdot 6=3^n\cdot 2$

$a_n-b_n=-(a_{n-1}-b_{n-1})=(-1)^{n-1}\cdot 4=(-1)^n\cdot(-4)$

$\Rightarrow a_n=3^n-2(-1)^n$

6. 使不等式 $\left|C^n_1(-3)^2+2C^n_2(-3)^3+3C^n_3(-3)^4+\cdots+nC^n_n(-3)^{n+1}\right|<10^5$ 成立的最大正整數 n 為 10。

$\boxed{6}$ $\sum kC^n_k x^{k-1}\cdot x^2=\left(\frac{d}{dx}(1+x)^n\right)\cdot x^2 \Rightarrow n\cdot 2^{n-1}\cdot 9<10^5$

$n=10 \Rightarrow 46080<10^5$

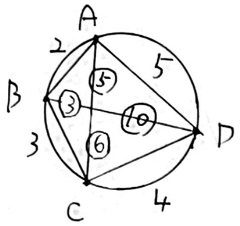
$n=11 \Rightarrow 101376>10^5$

Created with Scanner Pro

臺中市立臺中女子高級中等學校115學年度第一次教師甄選 數學科 試題

7. 圓內接四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=3$，$\overline{CD}=4$，$\overline{DA}=5$，若 $\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AD}$，則數對 $(m,n)=$__________。

$\left(\frac{22}{13},\frac{33}{65}\right)$

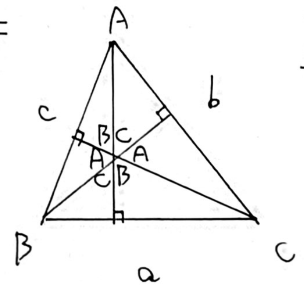


$$\frac{11}{5}\cdot\left(\frac{10}{13},\frac{3}{13}\right)=\left(\frac{22}{13},\frac{33}{65}\right)$$

$\boxed{7}$

8. 已知△ABC 的三邊長為 $\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CA}=6$。若 H 為△ABC 之垂心，則 $\overline{AH}=$__________。

$\frac{9}{\sqrt{7}}$



$$\frac{b\cos A}{\sin B}=\frac{a\cos A}{\sin A}=\frac{a}{\tan A}=\frac{9}{\sqrt{7}}$$

$$\cos A=\frac{27}{2\cdot4\cdot6}=\frac{9}{16}$$

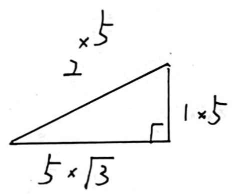
$\boxed{8}$

9. α,β,γ 為複數，在複數平面上對應的點分別為 $A(\alpha),B(\beta),C(\gamma)$，滿足 $\alpha^2+3\beta^2+4\gamma^2-2\alpha\gamma-6\beta\gamma=0$ 及 $|\alpha-\beta|=10$，則 ΔABC 的面積為__________。

$\frac{25\sqrt{3}}{2}$

$$(\alpha-\gamma)^2+3(\beta-\gamma)^2=0$$

$$\Rightarrow\ \alpha-\gamma=\pm\sqrt{3}i(\beta-\gamma)\ \Rightarrow$$



$$\Rightarrow\ \triangle=\frac{25\sqrt{3}}{2}$$

$\boxed{9}$

10. 已知 $x>1$ 且 $y>4$，則 $\frac{y^2}{x-1}+\frac{x^2}{y-4}$ 之最小值為__________。

20

Titu's Lemma

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\geq\frac{(a_1+\cdots+a_n)^2}{b_1+\cdots+b_n}$$

法1: $\frac{y^2}{x-1}+\frac{x^2}{y-4}\geq\frac{(x+y)^2}{x-1+y-4}$

$$\frac{(t+5)^2}{t}=t+10+\frac{25}{t}\geq20$$

"=" 成立：$\begin{cases}x+y=10\\ \frac{y}{x-1}=\frac{x}{y-4}\end{cases}\Rightarrow\ \begin{matrix}x=4\\ y=6\end{matrix}$

法2: $\frac{y^2}{x-1}+4(x-1)\geq4y$

$\frac{x^2}{y-4}+4(y-4)\geq4x$

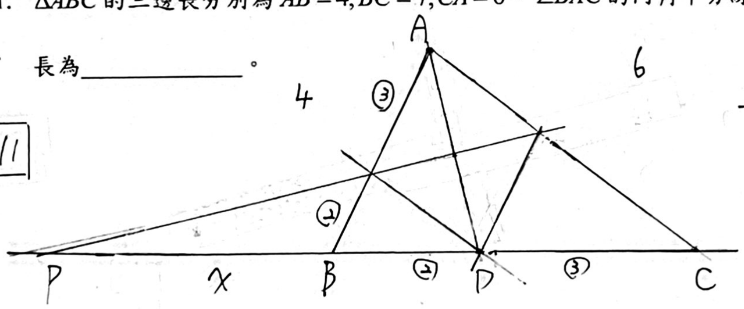
$\Rightarrow$ min $=20$

$\boxed{10}$

11. ΔABC 的三邊長分別為 $\overline{AB}=4,\overline{BC}=7,\overline{CA}=6$，$\angle BAC$ 的內角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D，$\overline{AD}$ 的中垂線交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 P 點，則 $\overline{BP}$ 的長為__________。

$\frac{28}{5}$

$\boxed{11}$



$$\frac{1}{1}\cdot\frac{x+\frac{28}{5}}{x}\cdot\frac{2}{3}=1$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{28}{5}$$

$7\cdot\frac{2}{5}$

Created with Scanner Pro