

115 陽明交大附中

12. 學期成績以平常成績的 40% 加上段考成績的 60% 計算，已知某班同學平常成績的標準差為 20 分，段考成績的標準差為 15 分，學期成績的標準差為 13 分，則平常成績與段考成績的相關係數為\_\_\_\_\_。

$$Z = \frac{2}{5}X + \frac{3}{5}Y \quad 169 = \text{Var}(Z) = \frac{4}{25} \cdot 20^2 + \frac{9}{25} \cdot 15^2 + 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot 20 \cdot 15r$$

$$\Rightarrow r = \frac{24}{12 \cdot 12} = \frac{1}{6}$$


13. 在某瀕危石虎的復育計畫中，研究員將石虎的活動範圍簡化為一條線性的棲地路徑，由左至右劃分為編號 0, 1, 2, 3, 4, 5 的六個區塊。已知當石虎進入編號 5 的區塊（核心保護區）後，將獲得永久安全不再移動；若進入編號 0 的區塊（開發密集區），則會因環境威脅而消失。若該石虎每日向右移動一個區塊（編號增加 1）的機率為 0.6，向左移動一個區塊（編號減少 1）的機率為 0.4，且該石虎目前位於編號 2 的區塊，則它最終成功到達編號 5 區塊（核心保護區）的機率為\_\_\_\_\_。

13] 甲: 2元 令  $Q_k = \text{甲} k \text{元時}$  win 的 prob  
乙: 3元  $Q_k = 0.6Q_{k+1} + 0.4Q_{k-1}$

$$Q_2 = \frac{1 - (\frac{2}{3})^4}{1 - (\frac{2}{3})^5} = \frac{135}{211} \quad \text{random walk}$$

二、計算證明題：(22 分，須詳列出過程，否則不予計分)

1. 在空間坐標系中，設  $\Omega$  為一底面落在  $xy$  平面上之直圓錐，其底面圓方程式為  $x^2 + y^2 \leq 4$ ，且頂點為  $V(0,0,6)$ 。設平面  $E_h: z=h$  (其中  $0 < h < 6$ ) 與  $\Omega$  相截之截痕為圓  $C_h$ 。若  $R_h$  為  $C_h$  之內接矩形，則以  $R_h$  為底面、原點  $O(0,0,0)$  為頂點之四角錐體積的最大值為何？(7 分)

1]   $r = \frac{6-h}{3}$   $A = (r \cos \theta)(r \sin \theta) \cdot 4$   $V = \frac{1}{3} \left(\frac{6-h}{3}\right)^2 \cdot 2h$   $\Rightarrow V \leq \frac{64}{27}$   
 $\Rightarrow 2r^2 \sin(2\theta) \leq 2r^2$   $\therefore \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \leq \frac{6-h}{3} + \frac{6-h}{3} + \frac{2h}{3} = 4$  "成立"  $h=2$

2. 設  $f(x) = 123x^2 + 234x - 345$ ，三次多項式  $g(x)$  的首項係數為 1，且  $y = g(x)$  的圖形通過點

$(114, f(114))$ 、 $(115, f(115))$ 、 $(116, f(116))$ 。設  $g(x)$  在  $x=115$  附近的一次近似函數為  $h(x)$ ，

則  $x=114$ 、 $x=116$ 、 $y=g(x)$  和  $y=h(x)$  的圖形所圍成的區域面積為何？(8 分)

2]  $y/math$   $g(x) - f(x) = (x-114)(x-115)(x-116) + f'(x)(x-115) + \frac{1}{2}f''(x)(x-115)^2$   $f(x) = f(115) \Rightarrow g(x) = (x-115)^3 + 123(x-115)^2 + (f'(x)-1)(x-115) + f(115)$   
 $g(x) = h(x) \Rightarrow x = 115$  or  $\int_{114}^{116} |g(x) - h(x)| dx$

3. 若實係數三次多項式  $f(x)$  有三個相異實根，且  $f'(x), f''(x)$  分別為  $f(x)$  的一階與二階導函數，請

證明： $[f'(x)]^2 \geq f(x)f''(x)$  對於所有實數  $x$  均成立。(7 分)

$$\frac{123}{3} (1-1) = 82$$

3]  $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} + \frac{1}{x-\gamma}$

$$g'(x) = \frac{f''(x)f(x) - f'(x)f'(x)}{(f(x))^2} = -\left(\frac{1}{(x-\alpha)^2} + \frac{1}{(x-\beta)^2} + \frac{1}{(x-\gamma)^2}\right) \leq 0 \quad \neq$$

【試題到此結束】