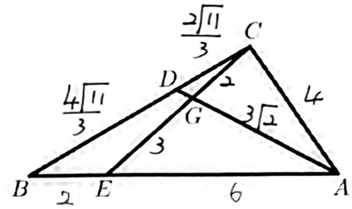
13. 如圖，$\Delta ABC$ 中，$\overline{AB}=8$、$\overline{AC}=4$、$\overline{BC}=2\sqrt{11}$。已知 $\overline{AD}$ 是 $\angle BAC$ 的平分線交 $\overline{BC}$ 於 $D$ 點。設 $E$ 點在 $\overline{AB}$ 上且滿足 $\overline{AE}=3\overline{BE}$，又 $\overline{AD}$ 和 $\overline{CE}$ 交於 $G$ 點，則 $\Delta ACG$ 的外接圓面積為________。

$\frac{32\pi}{7}$

$2(4^2)+6(2\sqrt{11})^2 = 8(\overline{CE}^2+12) \Rightarrow \overline{CE}=\sqrt{37-12}=5$




$\overline{AG}=\sqrt{24-6}=3\sqrt2$ , $\cos C = \frac{2}{2\cdot2\cdot4} = \frac18$

$2R = \frac{3\sqrt2}{\frac{3\sqrt7}{8}} \Rightarrow \pi R^2 = \frac{32}{7}\pi$

14. 已知三正數 $x$、$y$、$z$ 滿足 $x^2+4y^2+4z^2=12$，則 $\sqrt{3xy}+5z$ 的最大值為________。

$2\sqrt{21}$

$12 \geq 2\cdot 2xy + 4z^2$

$\Rightarrow 3(28) \geq (xy+z^2)((\sqrt3)^2+5^2) \geq (\sqrt{3xy}+5z)^2 \Rightarrow 2\sqrt{21}$

計算 1. 設 $z, c \in \mathbb{C}$，滿足 $zc = 2\bar z$ 且 $\left|\frac{z\bar z}{c^2}\right| = \frac94$，若 $z+c \in \mathbb{R}$，求 $z+c$

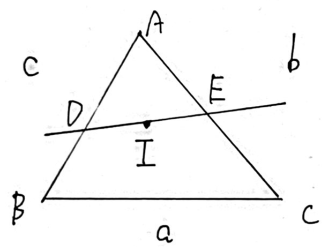
$(z, c \notin \mathbb{R}\ ?)$

sol: 設 $z = a+bi$

$\begin{cases} |z||c| = 2|\bar z| \\ |z|^2/|c|^2 = \frac94 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |c|=2 \\ |z|=3 \end{cases}$ , $I_m\left(z+\frac{2(\bar z)^2}{z\cdot\bar z}\right)=0 \Rightarrow 9b-4ab=0 \Rightarrow a=\frac94$ or $b=0$ (不合)

$\frac94 + \frac29\left(\frac{81}{16} - \left(9-\frac{81}{16}\right)\right) = \frac52$ #

2.




求 $\frac{\Delta ADE}{\Delta ABC}$ 之 min

115 台中一中

sol:

設 $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB}$ , $\overrightarrow{AC} = \beta\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AI} = \frac{b}{a+b+c}\cdot\frac{1}{\alpha}\overrightarrow{AD} + \frac{c}{a+b+c}\cdot\frac{1}{\beta}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow 1 = \frac{b}{a+b+c}\cdot\frac{1}{\alpha} + \frac{c}{a+b+c}\cdot\frac{1}{\beta} \geq 2\sqrt{\frac{bc}{(a+b+c)^2\ \alpha\beta}}$

$\Rightarrow \alpha\beta \geq \frac{4bc}{(a+b+c)^2}$