臺中市立臺中第一高級中等學校 115 學年度第 1 次教師甄選　數學科　試題卷

一、填充題甲：(每格 5 分，共 20 分)　2026.5.7(四) ~ 5.12(二)

1. 設 a、b、c 皆為正整數，且 $a<b<c$，已知 $a+b+c+ab+ca=376$，則序對 $(a,b,c)=$______。

(12,13,15)　$a+(b+c)+a(b+c)+1$

$\boxed{1}$　$(a+1)(b+c+1)=377=13\cdot 29$

2. 已知甲、乙、丙、丁、…共 16 人任意平分成 4 組，每組 4 人，則甲、乙同組且丙、丁不同組的機率為______。

$\frac{72}{455}$

$\boxed{2}$ 高成

0000	0000	0000	0000
甲乙丙	丁		
甲乙	丙	丁	

甲乙丙丁　甲乙丙丁

$$\frac{16\cdot3\cdot2\cdot12\cdot12!+16\cdot3\cdot12\cdot10\cdot12!}{16!}=\frac{12\cdot3\cdot12}{15\cdot14\cdot13}=\frac{72}{455}$$

3. 已知 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，若 $\sum_{n=1}^{2026}\frac{1}{2^{[\sqrt{n}]}}=a-\frac{b}{2^{42}}$，其中 a 為一位數正整數，b 為二位數正整數，則 $a+b=$______。

28

n	1	2	3	4 ~ 8	9 ~ 2024	2025	2026
$[\sqrt{n}]$	1	1	1	2 ~ 2	3 ~ 44	45	45

$\boxed{3}$

$S=3\left(\frac{1}{2}\right)+5\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots 89\left(\frac{1}{2}\right)^{44}$

$\frac{1}{2}S=\qquad 3\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots 87\left(\frac{1}{2}\right)^{44}+89\left(\frac{1}{2}\right)^{45}$

$\Rightarrow 3+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{42}}\right)-\frac{89}{2^{44}}+\left(\frac{1}{2^{44}}\right)$

$3+2-\frac{1}{2^{42}}-\frac{22}{2^{42}}=5-\frac{23}{2^{42}}$

$\Rightarrow 28$

4. 試求極限值 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\sqrt{3n^2-k^2+2nk}}{n^2}$ 的值為______。

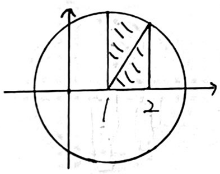
$\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{4}$

$\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\sqrt{3-\left(\frac{k}{n}\right)^2+2\left(\frac{k}{n}\right)}$

$\rightarrow \int_1^2 \underbrace{\sqrt{-(x-1)^2+4}}_{(=y)}\,dx$

$(x-1)^2+y^2=4$



$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot4\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{3}$

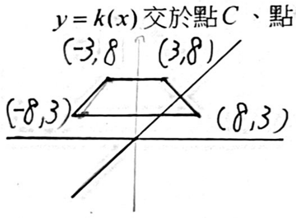
$=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、填充題乙：(每格 6 分，共 60 分)

5. 已知 $y=f(x)=2^x$ 的反函數為 $y=g(x)$，將 $y=g(x)$ 對 y 軸對稱後為 $y=h(x)$，再將 $y=h(x)$ 對 $x+y=0$ 對稱後為 $y=k(x)$。直線 $y=-x+11$ 分別和 $y=f(x)$、$y=g(x)$ 交於點 $A(3,8)$、點 B；直線 $y=x+11$ 分別和 $y=h(x)$、$y=k(x)$ 交於點 C、點 D，則四邊形 $ABCD$ 的面積為______。

55

$\boxed{5}$



$\Rightarrow 11\cdot5=55$

6. 設 $\begin{cases}a_{n+1}=\alpha a_n+\beta b_n\\ b_{n+1}=\gamma a_n+\delta b_n\end{cases}$，且矩陣 A 滿足 $\begin{bmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix}, \forall n\in N$。已知矩陣 A 為不可逆的轉移矩陣，且 $\begin{bmatrix}a_5\\ b_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{4}{3}\end{bmatrix}$，則矩陣 $A=$______。

$\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$

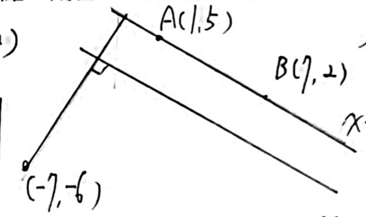
$\boxed{6}$　$\det\left(\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ 1-\alpha & 1-\beta\end{bmatrix}\right)=0 \Rightarrow \alpha=\beta$

$\begin{bmatrix}\alpha & \alpha\\ 1-\alpha & 1-\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_4\\ b_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha(a_4+b_4)\\ (1-\alpha)(a_4+b_4)\end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\alpha}{1-\alpha}=\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha=\frac{1}{3}$

7. 平面上有 ΔABC，其中點 $A(1,5)$、點 $B(7,2)$，且 ΔABC 的面積為 15。設 P 為圓 $x^2+y^2+14x+12y+80=0$ 上一點，則當 $\overline{PC}$ 長為最小時，C 點坐標為________。

$(-3,2)$

$\boxed{7}$



$30 = 3\sqrt5(2\sqrt5)$　$L_2 = \frac{11-1}{\sqrt5}$

$\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x-y=-8 \end{cases} \Rightarrow C(-3,2)$

8. 已知 P 點到直線 $L_1: x+4=\frac{y-11}{7}=\frac{z-7}{2}$ 與直線 $L_2: \begin{cases} x-z=7 \\ y=3 \end{cases}$ 的投影點分別為 $A(-5,a,b)$ 與 $B(c,d,0)$，且 $\overline{PA}=\overline{PB}$，則 P 點坐標為__________。

$A(-5,4,5)$　$B(7,3,0)$, $M(1,\frac{7}{2},\frac{5}{2})$

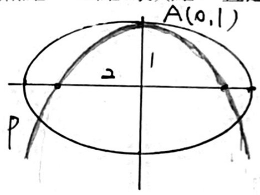
$(2,3,5)$ | $P\in A,B$ 的中垂面, $\vec n=(12,-1,-5)$, $\overrightarrow{AP}\perp\vec v_1$, $\overrightarrow{BP}\perp\vec v_2=(1,0,1)$

$\boxed{8} \Rightarrow \begin{cases} 12x-y-5z=-4 \\ x+7y+2z=33 \\ x+z=7 \end{cases} \Rightarrow (2,3,5)$

9. 平面上有一個中心為 O 點，F_1、F_2 為兩焦點的橢圓 Γ_1，且 A 點為其短軸上其中一個頂點。另有一個以 O 點為焦點，A 點為頂點，且過點 F_1、F_2 的拋物線 Γ_2。已知 Γ_1 與 Γ_2 有 P、Q、A 三個交點，則 $\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}=$________。

$\frac{11}{5}$

$\boxed{9}$



$\begin{cases} \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{1}=1 \\ x^2=-4(y-1) \end{cases} \Rightarrow 5y^2-4y-1=0$

$\begin{matrix} 5 & +1 \\ 1 & -1 \end{matrix}$　$y=-\frac{1}{5}$　$x^2=\frac{24}{5}$　$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=\frac{11}{5}$

10. 在數列 $\langle a_n\rangle$ 中，已知首項 $a_1=\frac{5}{2}$，且遞迴關係式為 $2a_n-a_{n-1}=4n+2$（其中 $n\geq 2$），求此數列的一般項 a_n 為__________。

$a_n=4n-2+(\frac{1}{2})^n$

$2(a_n-(\alpha n+\beta))=a_{n-1}-(\alpha(n-1)+\beta)$

$\frac{5}{2}-2 \rightarrow \frac{1}{2}$

$\boxed{10}$　$\Rightarrow \alpha=4$, $\beta=-2 \Rightarrow a_n-(4n-2)=\frac{1}{2}(a_{n-1}-(4(n-1)-2))=(\frac{1}{2})^{n-1}(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^n$

11. 設 $f(x)$ 為一實係數三次多項式。已知 $f(x)$ 除以 $(x-2)^2$ 的餘式為 $12x-20$；且 $f(x)$ 除以 $(x-4)^2$ 的餘式為 $12x-36$。若 $y=f(x)$ 的對稱中心為 $(h,f(h))$，則 $x\cdot f(x)$ 除以 $(x-h)(x-2)(x-4)$ 的餘式為__________。

$4x^2-4x$

$(2,4),(3,8),(4,12)\in L: y=4x-4$

$\boxed{11}$　$f(x)=(x-2)^2Q_1(x)+12(x-2)+4$

$m=12 \Rightarrow$ i.p. $(3,8)$

$f(x)=(x-4)^2Q_2(x)+12(x-4)+12$

$f(x)-(4x-4)=A(x-2)(x-3)(x-4)$

$r(x)$

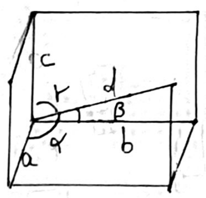
$\Rightarrow xf(x)=(x-2)(x-3)(x-4)(xA)+\boxed{4x^2-4x}$

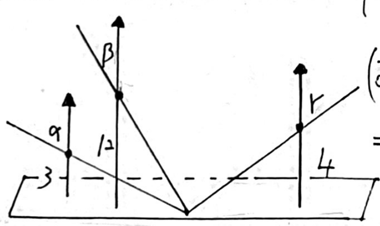
12. 用 12 根鋼條架構出一個正立方體的裝置藝術，今將其斜立在公園的平地上，如圖所示。為了穩固此裝置藝術，除了將 O 點落在地面上，還在 A,B,C 三處各架上一根垂直地面的鐵柱，分別為 $\overline{AA'}$、$\overline{BB'}$ 與 $\overline{CC'}$。若已知正立方體的邊長為 13 公尺，且點 A 到地面的垂直距離 $\overline{AA'}$ 為 3 公尺，點 B 到地面的垂直距離 $\overline{BB'}$ 為 4 公尺，試求該正立方體中，距離地面最遠的頂點其高度為________公尺。

19

$1=\frac{3^2+4^2+12^2}{13^2}$

$\boxed{12}$

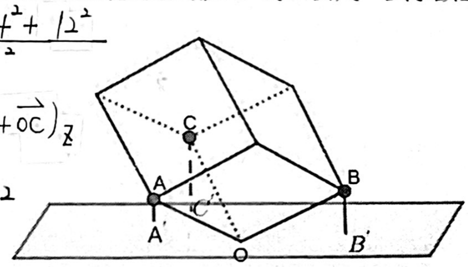




$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})_z$

$=3+4+12$

$=19$



$1=a^2+b^2+c^2 \Rightarrow 1=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$