教育部受託辦理115學年度
公立高級中等學校教師甄選

數學科 試題

作答注意事項
1. 本試題共兩部分：選擇題 17 題，及綜合題 2 大題，共計 100 分。
2. 選擇題請用2B軟心鉛筆在答案卡劃記，綜合題限用藍色、黑色原子筆或鋼筆在答案本上作答，但繪圖時得使用黑色鉛筆。
3. **本科「不可以」使用電子計算器。**

第一部分：選擇題（共 40 分）

一、單選題（每題 2 分，共 22 分）

(D) 1. 設$n=(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{64}+1)(2^{128}+1)$，則$n$的整數部分是幾位數？ (A) 75 (B) 76 (C) 77 (D) 78。

(B) 2. 兩平面向量$\vec{a}$、$\vec{b}$，已知$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，且$\vec{a}$、$\vec{b}$的夾角為120°，下列哪一個選項數值最大？

(A) $|\vec{a}+\vec{b}|$ (B) $|\vec{a}-\vec{b}|$ (C) $|\vec{a}|$ (D) $\sqrt{2}|\vec{b}|$。

(D) 3. 坐標平面上三角形ABC的三個頂點中，$A(-4，0)$，$C(4，0)$，而另一頂點B在橢圓$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$，$\dfrac{\sin A+\sin C}{\sin B}$為何？ (A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{2}{3}$ (C) $\dfrac{3}{4}$ (D) $\dfrac{5}{4}$。

(A) 4. 在直線$L: 2x+3y=7$上，且位於圓$C: x^2+y^2=73$內部的格子點個數為何？

(A) 4個 (B) 5個 (C) 6個 (D) 7個。

(A) 5. 若$\dfrac{n!}{12^{20}}$為整數，則正整數n的最小值為？(A) 45 (B) 48 (C) 60 (D) 64。

(A) 6. 平面上有36條兩兩相互不平行的直線，在這些直線所形成的所有交角中，最小角的角度為θ，則θ的最大值為？(A) 5° (B) 6° (C) 8° (D) 10°。

(B) 7. 箱子中有 100 顆球，其中有 25 顆黑球、25 顆白球、25 顆紅球與 25 顆黃球，任意取出k顆球，若希望取出的球中一定有 10 顆(或以上)同色的球，則k的最小值為何？

(A) 36 (B) 37 (C) 40 (D) 41。

(C) 8. 設 n 為正整數，若 n^n 為 n 位數，則滿足條件的 n 有幾個？

（已知 $log2\approx 0.3010$, $log3\approx 0.4771$, $log7\approx 0.8451$）

(A) 1個 (B) 2個 (C) 3個 (D) 無限多個。

(B) 9. 設數列 $\langle a_n\rangle$ 的一般項 $a_n=\sqrt{n^2+n}-n$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=$？

(A) 0 (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) 1 (D) 不存在。

(B) 10. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{2^k}=$？ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 不存在。

(B) 11. 設函數 $f(x)=\int_0^{x^2}\sqrt{t^2+1}\,dt$，則 $f'(1)=$？ (A) $\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) 4 (D) $4\sqrt{2}$。

二、多選題（每題 3 分，全對才給分，共 18 分）

(BD) 12. 下列有關指數與對數函數的選項，請選出正確的選項。

(A) 對所有實數t，指數方程式$10^x=t$恆有解。

(B) 對所有實數s，對數方程式$logx=s$恆有解。

(C) 底數$a>1$的指數函數$y=a^x$與對數函數$y=log_a x$的圖形一定相交。

(D) 若$a>1$，$y=a^x$與直線$x+y=5$相交於點$(2，3)$，則$y=log_a x$與直線$x+y=5$相交於點$(3，2)$。

(AB) 13. 不等式$x(x-2)(x+3) \le 0$的解與下列那些相同?

(A) $x(x-2)^3(x+3)(x^2+1) \le 0$。

(B) $(x^2+x-6)(x^5+6x^3+9x) \le 0$。

(C) $x^2(x-2)(x+3) \le 0$。

(D) $x^2(x^2+x-6) \le 0$。

(AC) 14. 坐標空間中一平面與$E_1: 2x-y+z=5$,$E_2: x+y+2z=4$分別交於直線L_1、L_2。已知L_1、L_2 互相平行,且L_1通過點P(3, 0,－1)、L_2通過點Q(1, 1, 1),若直線L為平面E_1、E_2的交線,則下列哪些正確?

(A) 平面E_1、E_2的銳夾角為$60°$。

(B) 直線L_1的方程式為$x-3=-y=z+1$。

(C) 點P到直線L的距離為$\sqrt{2}$。

(D) 直線PQ到直線L的距離為$\sqrt{2}$。

(BC) 15. 已知實係數多項式$f(x)$最高次項係數為正。又$f(x)$在$x=1$、4處有極小值,且在$x=3$處有極大值。根據上述條件,試選出正確的選項。

(A) $f(1) < f(3)$。

(B) 存在實數a, b滿足$1<a<b<3$,使得$f'(a) > f'(b)$。

(C) $f''(1) > 0$。

(D) $f(x)$的次數可能為5。

(AD) 16. 從 1 到 20 的正整數當中任意選取數字,試選出正確的選項。

(A) 選三個數字,此三數可以形成等差數列的情形有90種。

(B) 選三個數字,此三數乘積為 4 的倍數的情形有570種。

(C) 選四個數字,此四數可以形成等差數列的情形有63種。

(D) 選四個數字,此四數乘積為 4 的倍數的情形有4035種。

(BD) 17. 設 $\omega=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$,其中 $i=\sqrt{-1}$,試選出正確的選項。

(A) $(\omega-1)(\omega^2-1)(\omega^3-1)(\omega^4-1)=1$。

(B) $(\omega+1)(\omega^2+1)(\omega^3+1)(\omega^4+1)=1$。

(C) $\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}+\frac{1}{\omega^4}=2$。

(D) $\frac{1}{\omega+1}+\frac{1}{\omega^2+1}+\frac{1}{\omega^3+1}+\frac{1}{\omega^4+1}=2$。

第二部分:綜合題(共 60 分)

一、填充題(每題 5 分,共 35 分)

1. 設$a>0$,若$xy-3x+y=0$,且$a^x=10^y=8$,則a=__125____ 。

2. 定積分$\int_{-1}^{7}(-2+\sqrt{-x^2+6x+7})\,dx$=__$8\pi-16$___。

3. 若實數a可以讓複數$z=(3a+\cos\theta)+(a-\sin\theta)i$ 滿足:對任意實數θ,$|z|\le 3$均成立,則實數a的範圍為__$-\frac{\sqrt{10}}{5}\le a\le\frac{\sqrt{10}}{5}$__。

4. 對任意實數x，函數$f(x)$滿足$f(x+2)=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}$，若$f(1)=2$，$f(2)=-3$，則$f(118)=$___$\frac{1}{3}$___。

5. 設 a 為實數，若方程式 $(|x+5|-1)(x+2)=a$ 有三個相異實根，則 a 的範圍為$-1<a<3$。

6. 現有15個糖果，甲、乙兩人輪流拿糖果，每次只能拿1個或2個，拿完為止。若由甲先拿，且最後一次也由甲拿完剩餘糖果，則兩人拿糖果過程的可能情形有___493___種。

7. 設 A , B , C 為平面上三點，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=4$, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=6$，則 $\triangle ABC$ 的面積為__$\sqrt{11}$____。

二、證明題（共 25 分）

1. 試用兩種高一同學可理解方法證明：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$。(8分)

2. 坐標平面上，設 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 為拋物線 $y=ax^2$ 上的相異兩點，且過 A 作此拋物線的切線為 L_1，過 B 作此拋物線的切線為 L_2。若 L_1 和 L_2 交於點 $P(x_3,y_3)$，試證明 $x_3=\frac{x_1+x_2}{2}$。(8分)

3. 設α、β、γ是三角形ABC的三個內角，證明$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$。(9分)