新北市公立高級中等學校 115 學年度教師聯合甄選

數學科試題

考生作答說明：

一、請先檢視答案卷准考證號碼、姓名是否相符？如果不符，請立即向監試人員反映。

二、本試題計有：填充題 10 題，計算題 2 題。

三、題目如涉及計算，<u>禁止使用</u>電子計算功能設備運算。

四、答案卷請使用黑色或藍色原子筆作答，答案以正楷書寫清楚，以免無法判讀。

五、答案卷與試題卷須一起繳交，始可離開試場。

新北市公立高級中等學校 115 學年度教師聯合甄選
數學科試題

一、填充題：共 10 題，每題 7 分

2647 1. 與115互質的正整數，由小到大排列形成一數列，例如：1,2,3,4,6,7,...，試問此數列第2026項為何？ $115=5\times23$

每115為一個週期，$\phi(115)=115\times(1-\frac{1}{5})\cdot(1-\frac{1}{23})=88$

$2026\div88=23\cdots2$，代表23個週期 $\Rightarrow 23\times115=2645\Rightarrow 2646, 2647$

7月30日 2. 小明將自己的生日，月份寫成兩質數的和，日期寫成兩質數的差，最後將此四個質數相乘，得到2590。試問小明的生日是幾月幾日？

$2590=2\times5\times7\times37$

月：$2+5=7$

日：$37-7=30$

20 3. 已知正實數 a，b，c 滿足$a^a=2(\sqrt{b^b})=5(\sqrt[5]{c^c})=10$，
則 $10\left[(a\log a)^3+\left(\frac{b}{2}\log b\right)^3+\left(\frac{c}{5}\log c\right)^3\right]+3abc(\log a)(\log b)(\log c)$ 的值為何？

$a^a=10,\ b^b=25,\ c^c=32,\ \log a^a=1,\ \log b^b=2\log5=2-2\log2,\ \log c^c=5\log2$

所求$=10[1+(1-\log2)^3+(\log2)^3]+3\cdot1\cdot(2-2\log2)\cdot5\log2=20$

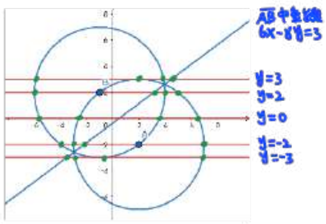
2 4. 已知實係數多項式方程式 $x^3+ax^2+bx+8=0$ 恰有兩根相等且$ab=8$，
則 $a-b$ 的值為何？設三根為 α,α,β，由根與係數知

$\Rightarrow\begin{cases}2\alpha+\beta=-a & \text{①}\\ \alpha^2+2\alpha\beta=b & \text{②}\\ \alpha^2\beta=-8 & \text{③}\end{cases}$ ③ $\Rightarrow\beta=\frac{-8}{\alpha^2}$ 代入①,② $\Rightarrow\begin{cases}2\alpha+\frac{-8}{\alpha^2}=-a\\ \alpha^2+\frac{-16}{\alpha}=\frac{8}{a}\end{cases}$，兩式相乘整理得 $\alpha^6-16\alpha^3+64=0$

$\therefore\alpha^3=8\Rightarrow\alpha=2\Rightarrow\beta=-2$

$\therefore a-b=-(2\alpha+\beta)-(\alpha^2+2\alpha\beta)=2$

5 5. 坐標平面上，已知水平線 $y=k$ 上恰有相異四個點，可與點 $A(2,-2)$、點 $B(-1,2)$ 形成等腰三角形，試問這樣的 k 共有幾種可能？



$\overline{AB}=5$，以A為圓心半徑為5畫一圓，
以B為圓心半徑為5畫一圓，
$\overline{AB}$中垂線為$6x-8y=3$
當$k=0$時 $\overline{AB}$中垂線與$y=0$交點恰為$\overline{AB}$中點，無法形成△

17 6. 空間中有一個三角形，其三個頂點坐標分別為 $A(-3,-2,1)$、$B(3,1,1)$、$C(-1,0,2)$，若此三角形的內切圓半徑為$a+b\sqrt{c}+d\sqrt{e}+f\sqrt{g}$（有理化至最簡根式），其中 a，b，c，d，e，f，g 都是有理數，則 $c+e+g$ 的值為何？

$\overrightarrow{AB}=(6,3,0)$，$\overrightarrow{AC}=(2,2,1)$，$\overrightarrow{BC}=(-4,-1,1)$，$\cos A=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{2}{\sqrt5}$，$\Rightarrow\sin A=\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{1}{2}\times|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\frac{1}{\sqrt5}=r\cdot\frac{|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{BC}|}{2}\Rightarrow r=\frac{9}{2}+3\sqrt2-\frac{3}{2}\sqrt5-\frac{3}{2}\sqrt{10}$，$\therefore$ 所求$=2+5+10=17$

設 $u=a+b-x$ 即可證

x 代 $x-1$ 得 $f(x)+f(2-x)=|x-1|^{2025}$

$\frac{1}{2026}$ 7. 已知函數 f 滿足 $f(1+x)+f(1-x)=|x|^{2025}$，則積分 $\int_0^2 f(x)dx$ 之值為？

因為 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$，設 $I=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 f(2-x)dx$

偶函數

$2I=\int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 f(2-x)dx=\int_0^2 f(x)+f(2-x)dx=\int_0^2 |x-1|^{2025}dx=\int_{-1}^1 |u|^{2025}du=2\int_0^1 u^{2025}=\frac{2}{2026}$

$\therefore I=\frac{1}{2026}$

40361 8. 給定一個初始數列，將相鄰兩項，用右邊的項減左邊的項後所得到的值寫在此兩項中間，這樣稱作一個操作。例如：初始數列為 3, 8，操作一次後變 3,5,8 ，操作第二次變 3,2,5,3,8 ，操作第三次後變成 3, −1, 2, 3, 5, −2, 3, 5, 8。現在初始數列改為 115, 2026 ，試問操作 20 次後得到的數列，其各項總和為多少？

末　首

設數列 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，新插入的項總和為 $(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\cdots+(x_n-x_{n-1})=x_n-x_1$

故每操作一次總和多 $x_n-x_1=2026-115=1911$

所求 $=115+2026+1911\times 20=40361$

4054 9. 已知正整數數列 a_n（$n\in N$）滿足 $a_1=\frac{2^{2026}(2^{2026}-1)}{3}$ 且 $a_{n+1}=\begin{cases}\frac{a_n}{2}, & a_n\text{為偶數}\\ 3a_n+1, & a_n\text{為奇數}\end{cases}$，

則此數列從第幾項開始為 1，並且開始形成週期數列？

$a_1=2^{2026}\times\frac{4^{1013}-1}{3}$ 為偶數，因為 $4\div 3$ 餘 1，故 $4^{1013}-1$ 為 3 的倍數，且 $\frac{2^{2026}-1}{3}$ 為奇數

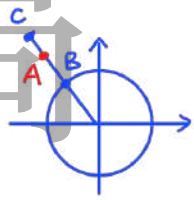
$a_2=\frac{a_1}{2}=2^{2025}\times\frac{2^{2026}-1}{3}$，…，$a_{2027}=\frac{2^{2026}-1}{3}$，$a_{2028}=2^{2026}$，…，$a_{4054}=1$

3 10. 已知 a 、 b 、 θ 為實數，其中 $a^2+b^2>4$，

則 $f(a,b,\theta)=\sqrt{(a-2\cos\theta)^2+(b-2\sin\theta)^2}+\sqrt{(a+3)^2+(b-4)^2}$ 的最小值為何？

$A(a,b)$，$B(2\cos\theta,2\sin\theta)$，$C(-3,4)$

所求 $=d(A,B)+d(A,C)\geq d(C,O)-r=3$



二、計算題：共 2 題，每題 15 分

−675 1. 已知 x 、 y 、 z 三數滿足 $x+y+z=1$ 且 $x^3+y^3+z^3=2026$，

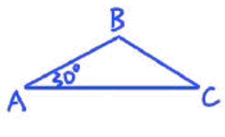
則 $(x+y)(y+z)(z+x)$ 之值為何？

$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x)$

$\Rightarrow 1^3=2026+3$ 所求 $\Rightarrow$ 所求 $=-675$

2 2. 設 $\triangle ABC$ 中，三邊長 $\overline{AB}=c$，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$ 且 $b>c$，若 $\angle BAC=30°$，

則 $\frac{b^2-c^2}{a^2}$ 的最大值為何？



正弦

$\frac{b^2-c^2}{a^2}=\frac{\sin^2 B-\sin^2 C}{\sin^2 A}=\frac{\sin(B+C)\cdot\sin(B-C)}{\sin^2 A}=\frac{\sin A\cdot\sin(B-C)}{\sin^2 A}$

$=2\sin(B-C)\leq 2$，"=" 成立時 $B-C=90°$，又 $B+C=150°$

$\therefore B=120°$，$C=30°$，故最大值為 2