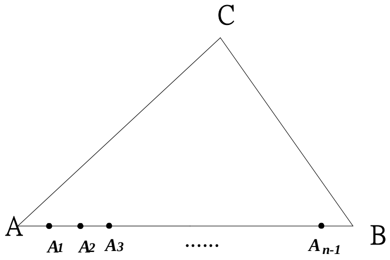
臺北市立南湖高級中學 115 學年度第 1 次正式教師甄選

數學科試題

說明：
(1)本試卷共包含 4 題複選題，每題 5 分；10 題填充題，每題 5 分；3 題計算證明題，每題 10 分，共計 100 分。
(2)請將複選題及填充題答案填入答案紙上相應答案格內。
(3)答案須將整數乘開或分數化至最簡，答案正確且完整，才給分。

壹、複選題(4 題，每題 5 分，錯一個選項扣 2 分，每題扣完為止)

(　　) 1. $\triangle ABC$ 中，$\angle CAB=60^{\circ}$，$\overline{BC}=2\sqrt{19}$、$\overline{AC}=4$，若A_1、A_2、A_3、…、A_{n-1}共$(n-1)$個點在$\overline{AB}$上且將$\overline{AB}$均分成 n 等份(n 為大於 10 的正整數)，令$\angle ACA_1=\theta_1$、$\angle A_1CA_2=\theta_2$、$\angle A_2CA_3=\theta_3$、…、$\angle A_{k-1}CA_k=\theta_k$、…、$\angle A_{n-2}CA_{n-1}=\theta_{n-1}$，下列何者正確?



（A）$\overline{AB}=10$；
（B）$\triangle ABC$ 面積為$10\sqrt{3}$；
（C）$\overline{A_1C}$、$\overline{A_2C}$、$\overline{A_2C}$、…、$\overline{A_{n-1}C}$長度形成一個遞減數列；
（D）θ_1、θ_2、θ_3、…、θ_{n-1}　形成一個遞增數列；
（E）當 $n=100$，若θ為數列θ_1、θ_2、θ_3、…、θ_{99}的最大值，則$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{60}$。

(　　) 2. 若函數$f(x)=|\sin x-2|+|\cos x+3|$，試問下列何者正確?
（A）$f(x)$的週期為π；
（B）$f(\pi)>4$；
（C）$f(x)$圖形對稱於$x=\frac{\pi}{3}$；
（D）$f(x)$的最大值為$5+\sqrt{2}$　；
（E）$f(x)$圖形與 $y=3$ 沒有交點。

(　　) 3. 某疾病的確診者痊癒後身上必有抗體，某廠商想要研發試劑，利用唾液來檢測抗體方便公衛機關確實掌握全國的確診人數。廠商隨機抽選 1000 人做試劑測試，發現在確診的情況下，試劑顯示此人有抗體的比率為 t，在無確診的狀況下，試劑顯示有抗體的比率為 0.06。根據目前統計，社會上約有 40%的確診人數。令試劑顯示有抗體的狀況下，此人確診的機率為$f(t)$，若衛生機關要求$f(t)\geq 0.9$，試劑才能上市，請選出正確的選項。

（A）　$f(t)=\frac{0.4t}{0.4t+0.6\times 0.94}$；
（B）　當 $0<t<1$ 時，$f(t)$為遞增函數；
（C）　試劑可以上市時，t 最小值為 0.81；

（D） 當 t 達到可上市的最小值時，此試劑的誤判率小於 0.1

(其中誤判率= P(確診卻顯示無抗體)+ P(未確診卻顯示有抗體))；

（E） 當 t 達到最小值時，試劑的準確率大於 8 倍的誤判率

(其中準確率= P(確診且顯示有抗體)+ P(未確診且顯示無抗體))。

(　　) 4. $x=C_0^{21}(\sqrt{5}-1)^{21}+C_1^{21}(\sqrt{5}-1)^{20}+C_2^{21}(\sqrt{5}-1)^{19}+\cdots+C_{20}^{21}\left(\sqrt{5}-1\right)+1$，試問下列選項哪些正確？

參考數值：log2≈0.3010、log3≈0.4771、log7≈0.8451、log1.1≈0.0414、log3.1≈0.4914

（A）x 是有理數；

（B）若$x=10^a$，則$a=\frac{21}{2}$；

（C）$x>10^{10\log 5}$；

（D）x 的整數部分為八位數；

（E）x 的整數部分最高兩位數字為 20。

貳、填充題(10 題，每題 5 分，每題須完全答對才給分，答錯不倒扣。各題答案若非整數，請以最簡分數或最簡分式作答)

1. 袋中有紅球與白球共 16 顆（其中紅球與白球分別都至少有 2 顆），從袋中抽出 2 球，且 2 球均為紅球的機率大於$\frac{1}{4}$。試問從袋中抽出 3 球，且 3 球中有紅球也有白球的機率之最大值為__________。

2. 設矩陣 $A=\begin{bmatrix}2 & \frac{1}{2}\\ 1 & \frac{5}{2}\end{bmatrix}^5\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$，則矩陣 A 中所有元(素)的總和為__________。

3. 坐標平面上，直線 L 過點 $(3,2)$ 且分別交 x 軸正向、 y 軸正向於 A 、 B 兩點。若 A 、 B 兩點在直線 $8x+3y+12=0$ 上的投影點分別為 C 、 D ，則 $\overline{CD}$ 的最小值為__________。

4. 正四面體 $O-ABC$ 中， D 點在 $\overline{OA}$ 上且 $\overline{DA}:\overline{DO}=1:3$ ， E 為 $\overline{BC}$ 中點， P 為 $\overline{DE}$ 上的一點。設 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OD}+y\overrightarrow{OE}$ ，則當 $\left|\overrightarrow{OP}\right|$ 為最小值時， $x=$__________。

5. 設 x 為實數，則函數 $f(x)=\sqrt{x^4-x^2-10x+26}-\sqrt{x^4-5x^2+9}$ 的最大值為__________。

6. 坐標空間中有兩點 $A(5,1,12)$ ， $B(4,2,3)$ ，現於 y 軸上取一點 P ，使得 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 有最小值，則 P 點坐標為__________。

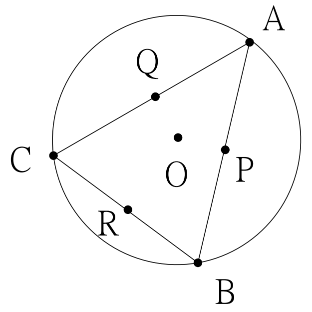
7. 設 $f(x)=x^3-x^2+2x-3$，$g(x)=x^4-2x^3+3x^2-7x+7$，已知 $f(x)=0$ 的三個相異根分別為 α,β,γ，則 $\dfrac{1}{g(\alpha)}+\dfrac{1}{g(\beta)}+\dfrac{1}{g(\gamma)}=$__________。

8. 設 a 為整數，滿足 $\left[\dfrac{1}{2}a\right]+\left[\dfrac{2}{3}a\right]=a$，試求 a 的最大值為__________。（[ ]為高斯符號，亦即：$[x]$表示不大於 x的最大整數。）

9. 坐標平面上，函數 $y=\sqrt{3-\sqrt{x}}$，x 軸，直線 $x=1$ 與直線 $x=4$ 所圍成的區域面積為__________。

10. 空間中三向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\overrightarrow{c}=(c_1,c_2,c_3)$，若 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 64 & \alpha & 24 \\ \alpha & 9 & \beta \\ 24 & \beta & 36 \end{bmatrix}$，且 $\overrightarrow{a}\cdot\left(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}\right)=48\sqrt{3}$，則 $\alpha+\beta$ 的最大值為__________。

叁、計算證明題(3 題，每題 10 分)



1. 如圖，公園管理處在一圓形草皮上蓋三條直線步道 AB，AC 與 BC 方便民眾觀賞花卉，其中 A，B 與 C 三處出入口皆在圓上，已知 $A(6,7)$，圓心 $O(2,4)$，O 點到直線 AB 與 AC 的距離皆為$\sqrt{5}$，並在三步道$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{BC}$的中點處 P，Q，R 三處設立路燈。試問：
   (1). 直線 AB 的斜率為多少(3 分)；
   (2). $\overline{AO}$：$\overline{OR}$的比值為多少(3 分)；
   (3). 若甲在 C 點，乙在 B 點兩人同時出發，其中甲沿著步道 AC 向 A 前進，乙沿著步道 BC 向 C 前進，若甲的速度是乙的$\sqrt{5}$倍，試問甲乙兩人的最短距離為何？(4 分)

2. (1).證明正弦定理：$\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 的對邊長為 a、$\angle B$ 的對邊長為 b、$\angle C$ 的對邊長為 c，
   則$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$。(3 分)
   (2).承(1).符號，證明餘弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$。(4 分)
   (3).證明和差化積公式：$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$。(3 分)

3. 請用兩種不同的方法計算 115 年學測第 17 題『直角ΔABC中，$\angle CAB$ 為直角，$\overline{AB}$邊上一點 D，滿足$\angle BCD$=2$\angle ACD$，且$\overline{BC}=2\overline{BD}$。若$\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AB}$，則 k 的值為？（化為最簡分數）』。請以寫給學生看的詳解方式書寫，每個完全正確的方法及過程最高得 5 分，合計最高 10 分。

【試題結束，預祝金榜題名】