臺北市立內湖高級工業職業學校 115 學年度正式教師甄選

筆試題目卷

科別：數學科　　　　考試時間：100 分鐘

一、填充題（每題 5 分，共 50 分）

1. 方程式$\left|\left|\left|\left||x^2-2x-3|-4\right|-5\right|-6\right|-7\right|=x^2+x-89$的所有實根為＿＿＿＿＿。

2. 多項式x^{1234}除以x^2-x+1的餘式為＿＿＿＿＿。

3. 設θ為銳角，則$\frac{2\sqrt{2}}{3}tan^3\theta+8cot^2\theta$的最小值為＿＿＿＿＿。

4. 平行四邊形$ABCD$中，$\overline{AB}=\sqrt{23}$，$\overline{BC}=\sqrt{37}$，若兩對角線的其中一個交角為$60°$，則$ABCD$的面積為＿＿＿＿＿。

5. 小明班上有n位同學，座號分別為$1,2,3,\dots,n$。講桌上的籤筒中原有全班同學的座號籤各一支，頑皮的小明偷偷把自己的籤拿掉。已知剩下$n-1$支籤的編號平均數為$\frac{91}{4}$，若小明的座號為x，則數對(n,x)為＿＿＿＿＿。

6. 將正整數n表示成一個以上的正整數之和，稱為「分拆」；接著計算分拆後各正整數的乘積，稱為「分拆乘積」。舉例來說，$(1+1+3)$、$(1+4)$、$(1+2+2)$分別是$n=5$的其中三種分拆方式，它們的分拆乘積分別為3、4、4。求$n=2026$的所有分拆方式中，其分拆乘積的最大值為＿＿＿＿＿。

7. 設實數a,b,c,d滿足$a^2+b^2=2$，且$(c+2)^2+(d+1)^2=3$，則$(ad-bc)^2$的最大值為__________。

8. 箱中有n顆球，編號1到n，每球被抽到的機率均等。假設從中同時抽出兩球，兩球編號差的期望值為E_1；而從中抽出一球後放回，再抽一球，兩次抽球編號差的期望值為E_2，則$\lim_{n\to\infty}(E_1-E_2)$之值為__________。

9. 平行四邊形$ABCD$中，已知$\overline{AB}=6$，且ΔABC的外接圓半徑為4，則對角線$\overline{BD}$的長度之最大值為__________。

10. 設拋物線$y=x^2$的焦點為F，在拋物線上取一點P_1，過P_1作鉛直線交x軸於點X_1，連$\overline{FX_1}$交拋物線於點P_2，過P_2作鉛直線交x軸於點X_2，連$\overline{FX_2}$交拋物線於點P_3，依此類推可得到一系列的點$P_1,P_2,P_3,\ldots,P_n$與$X_1,X_2,X_3,\ldots,X_n$。求$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{X_nP_{n+1}}}{\overline{P_{n+1}X_{n+1}}}$之值為__________。

二、計算證明題（每題10分，共50分）

1. 考慮以下問題：「從5男4女之中任選5人，求至少含有2男1女的方法數。」某位學生的做法是「先任選2男，再任選1女，再從剩下6人中任選2人，因此所求為$C_2^5\times C_1^4\times C_2^6$。」但他發現答案是錯的，請指出錯誤之處，並示範兩種不同方法求出正確答案。

2. 正弦定理與餘弦定理具有等價關係，設ΔABC中，$\overline{AB}=c$、$\overline{BC}=a$、$\overline{CA}=b$，請從下列兩式中擇一證明：

(1) 已知$\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}$，證明$a^2=b^2+c^2-2bccosA$。

(2) 已知$a^2=b^2+c^2-2bccosA$，證明$\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}$。

3. 在1到2026的正整中選出n個數，使得這n個數當中，任意兩數的積或和都無法被它們的差整除，求n的最大值。

4. 設a, b, c為實數，且函數$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$在$-1 \leq x \leq 1$的範圍內之最大值為$M$、最小值為$m$，求$M - m$的最小值。

5. 對所有正整數n，定義數列F_n為「將所有滿足$0 \leq x \leq 1$且分母不大於n的最簡分數x，由小到大依序排列」，並將其中的0記為$\frac{0}{1}$，將1記為$\frac{1}{1}$。舉例來說，$F_1 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\}$，$F_2 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\}$，$F_4 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right\}$。此外規定$|F_n|$代表$F_n$的項數，因此$|F_1| = 2$、$|F_2| = 3$、$|F_4| = 7$。請回答下列問題：

(1) 求數列F_{100}之中，緊鄰在$\frac{23}{80}$後的下一項。

(2) 證明或否證：對於所有正整數n，$|F_n|$恆為質數。