

數學科准考證號：115Ma0_____ (請應考人填入)

臺北市立大理高級中學 115 學年度數學科正式教師甄選初選 (筆試) 試題

注意事項：請自行掌握時間分配，依序書寫於所附答題紙中，本次考試不再另加答題紙。未依序作答者，該題不予計分。

一、簡答題 (每題 8 分)

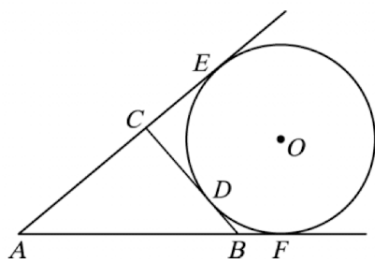
說明：

第一部分為簡答題，只需將各題答案依照題號在答案卷上書寫清楚。

1. 複數平面上，點 A, B, C 分別對應複數 z_1, z_2, z_3 ，若 $|z_1 - 3i| = |z_1 - 2 + i|$ ， $z_2 = (-1 + \sqrt{3}i)z_1$ ， $z_3 = 3i \cdot z_1$ ，則 $\triangle ABC$ 的最小面積為？(請化為最簡根式)

2. 若 $9^x + 6^x = 4^x$ ，試求 $x = ?$

3. 如圖，圓 O 與直線 BC, AC, AB 分別相切於 D, E, F 三點，已知 $\overline{BC} = 4$ ， $\overline{AC} = 5$ ， $\overline{AB} = 6$ ，若 $\overrightarrow{AD} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$ ，則 $(\alpha, \beta) = ?$



4. 有一個正四面體的公正骰子，四面點數分別為 $1, 2, 3, 4$ 。將骰子投擲三次，底面的點數分別為 a, b, c ，則此三數 a, b, c 可作為三角形三邊長的機率為？

5. 已知 $0 \leq \theta < 2\pi$ ，試求滿足不等式 $(\frac{1}{3})^{\sqrt{3}\cos\theta} \geq (\frac{1}{3})^{1+\sin\theta}$ 的 θ 值的範圍？

二、教學演示題 (每題 12 分)

說明:

請完整寫出演繹過程; 從教學者的角度, 對應解題過程, 簡述該過程應『如何引導學生思考, 或與過程中相關的課程延伸聯結』。

6. 甲袋中有 1 黑 1 紅兩顆球, 乙袋中有兩顆黑球。操作規則為: 先隨機自甲袋中取出一球置入乙袋, 再自乙袋中取出一球置入甲袋, 稱之為操作一次。某生按照此規則操作並記錄若干次後, 令

$$p_n = \text{操作完第 } n \text{ 次, 甲袋中有紅球的機率,}$$

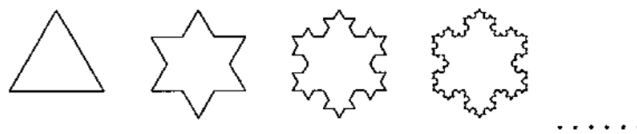
試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = ?$ 並解釋之。

7. 試證明 $\forall n \in \mathbb{N}, (3 + \sqrt{7})^n$ 的整數部分是奇數。

8. 設函數 $f(x)$ 滿足 $\int_2^x f(t) dt = 2x^3 - 6x + a - 1, a \in \mathbb{R}$ 為一定數。試求 $y = f(x)$ 與 x 軸所圍成的區域繞 x 軸旋轉所得之立體體積為?

9. 蒙提霍爾問題 (Monty Hall problem): 有一電視節目, 參賽者會看見三扇門, 其中一扇門的裏面有一輛汽車, 選中裏面是汽車的那扇門, 就可以贏得該車, 另外兩扇門裏面則都是一隻山羊。當參賽者選定了一扇門, 主持人會開啓另一扇是山羊的門; 並問:「要不要換一扇門?」, 請完整說明你的選擇與理由; 再者若條件改成『4 扇門中 1 車 3 羊, 選定後主持開 1 扇羊門 (剩 3 門)』, 則此時你的選擇 (換, 或不換) 與理由。最終, 若條件改成『 n 扇門中 1 車 與 $(n - 1)$ 羊, 選定後主持開 1 扇羊門 (剩 $(n - 1)$ 門)』時, 你的選擇與理由。

10. 假設 $\triangle ABC$ 是邊長為 1 的正三角形, 今將三邊分別三等分, 取中間段為一邊向外側做一個正三角形, 並將中間這一段擦去, 其次將剩下的每一邊再三等分, 取中間段為一邊向外側做一個正三角形, 再將中間這一段擦去, 依此序繼續下去, 可得到一系列的圖形, 這種自我複製的圖形, 被稱為科赫雪花曲線 (Koch snowflake)。如圖 (步驟一, 二, 三, 四....)。



若令 l_n, A_n 分別表示步驟 n 時, 科赫雪花曲線的周長與面積。試寫出 l_n, A_n 的遞迴表示式, 並寫出 l_n, A_n 的一般項通式。

簡答題：

1. $\frac{6 - \sqrt{3}}{10}$

2. $\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$

3. $\left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right)$

4. $\frac{17}{32}$

5. $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$

6. $p_n = \frac{3^n + 1}{2 \cdot 3^n}, \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1}{2}$

7. 略

8. $\frac{192\pi}{5}$

9. $\frac{2}{3}; \frac{3}{8}; \frac{n-1}{n(n-2)}$

10. $\begin{cases} l_1 = 3 \\ l_n = \frac{4}{3}l_{n-1} = 3\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \end{cases} ;$

$$\begin{cases} A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ A_n = A_{n-1} + 3 \cdot 4^{n-1} \left(\frac{1}{9}\right)^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{8\sqrt{3}}{5 \cdot 4} \end{cases}$$