臺北市立大直高級中學 115 學年度第一次專任教師甄選
數學科 甄試試題

請將答案按題號順序寫在答案卷上。
填充題須將答案化至最簡，非選擇題須詳附推論過程，否則不予計分。

一、填充題(每題 6 分，共 66 分)

1. 坐標平面上有一直線 $L:(3x-y)+a(x+y+4)=0$，且坐標平面上有一圓 C，其圓心坐標為 $M(1,2)$ 且半徑為 a。若當 $k<a<k+1$ 時(k 為正整數)，直線 L 與圓 C 相切，則 $k=$__________。

2. 在坐標平面上，二元一次聯立不等式 $\begin{cases} x-y\le 2 \\ x+2y\ge 8 \\ x\ge 2 \\ y\le 5 \end{cases}$ 的解 (x,y) 形成的解區域圖形為 $\Re$，若直線 $(2k+4)x+(k-1)y=7k+5$ 將圖形 $\Re$ 面積平分，則 $k=$__________。

3. 已知複數 $z_0=\frac{1}{7}+\frac{1}{5}i$，且複數平面上有四點：$0$、$1$、$i$ 和 $1+i$。令 $z_n=2z_{n-1}-\omega_n$，ω_n 為上述四點中最靠近 z_{n-1} 的點，試求 $70z_{2026}=$__________。

4. 已知 n 為自然數，$\langle a_n\rangle$ 為共有 n 項的正實數數列，若 $\sum_{k=1}^{n}a_k=24$，$\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2=36$，$\sum_{k=1}^{n}(a_k)^3=54$，則數對 $(a_1,n)=$__________。

5. 設多項式函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+115$，若滿足 $f(x)$ 為遞增函數的數對 (a,b)，將其繪製於橫坐標為 a 軸、縱坐標為 b 軸的新坐標平面上，並將其區域令為 S，則有關 S 與不等式 $2a-b+24\ge 0$ 的解所交集的區域面積為__________平方單位。

6. 已知 $f(2x+3)=1+\sum_{k=1}^{115}\frac{x^k}{k}$，試求極限值：

$\lim_{a\to 0}\left(\lim_{b\to 0}\frac{f(1+2a+3b)-f(1+2a)-f(1+3b)+f(1)}{ab}\right)=$__________。

7. 設橢圓 $\Gamma:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{41}=1$ 上有一動點 P，若線段 $\overline{MN}$ 為圓 $C:x^2+y^2-4x-1=0$ 的一直徑，則 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 的最大值為 a、最小值為 b，試求數對 $(a,b)=$__________。

8. <u>小天</u>在黑板上寫下 $0,1,2,3,4,5,6$ 等 7 個整數，要求<u>小真</u>按照下述要求擦去數字，直至黑板上不存在正數：若 n 為此時黑板上之最大整數，且有 k 個 $n-1$，則擦去一個 n，並於空白處寫下 k 個 $n-1$，最後於黑板上留下 A 個 0。試求 $\log_{10}\log_{10}\log_{10}A$ 的整數部分為__________。

9. 設 $x,y\in\mathbb{R}$，若 $x^2-2xy+3y^2=2$，則 x^2+2y^2 的最大值為 M，最小值為 m，則數對 $(M,m)=$__________。

10. 坐標平面上，圓 $C:x^2+y^2-6y+1=0$，二次函數 $y=f(x)=kx^2$ 的圖形與圓 C 分別在第一象限、第二象限各相切於一點 P、Q，若圓 C 的下半圓弧與 $y=f(x)$ 的上方所圍成的封閉區域為 R，則將 R 繞 x 軸旋轉一圈形成的旋轉體體積為__________立方單位。

11. 若 x_1 滿足 $2x+2^x=15$，x_2 滿足 $2x+2\log_2(x+3)=7$，則 $x_1+x_2=$__________。

二、非選擇題：(共 34 分)

1. 設伯努力試驗中，成功的機率為 p(其中 $0<p<1$)，且每次試驗成功與否不影響下次成功機率。試回答下列問題：
(1)若隨機變數 X 的取值表示獨立重複 n 次的伯努力試驗中成功的次數，試寫出隨機變數 X 的期望值與變異數，並證明之。(8 分)
(2)設隨機變數 Y 的取值表示重複試驗直到成功累計 2 次為止所需的次數，試寫出隨機變數 Y 的期望值，並證明之。(4 分)

2. 有一道數學問題：

已知 $-3\le x+2y\le 9$，$-1\le 2x-y\le 8$，試求 $8x+y$ 的最大值、最小值。

小天的解法如下：

$$\begin{aligned}&-3\le x+2y\le 9 \ \Rightarrow -3\le x+2y\le 9\\&-1\le 2x-y\le 8 \ \Rightarrow -2\le 4x-2y\le 16\end{aligned}$$，兩式相加得：$-5\le 5x\le 25 \ \Rightarrow -1\le x\le 5$

再解 $\begin{aligned}&-3\le x+2y\le 9\\&-5\le -x\le 1\end{aligned}$，兩式相加得：$-8\le 2y\le 10 \ \Rightarrow -4\le y\le 5$

最後 $\begin{aligned}&-8\le 8x\le 40\\&-4\le y\le 5\end{aligned}$，兩式相加得：$-12\le 8x+y\le 45$，故所求最大值 45，最小值 -12

請問：

(1)小天在過程中犯了什麼錯誤？請指出修正後，引導小天做正確的數學思考。(5 分)

(2)請提出**兩種**不同解法。(5 分)

3. 小直在參觀某公益畫展時，其中有一幅畫掛在垂直地面的牆上，已知畫布上緣到下緣的總長為 6 公尺，其畫布下緣距離地面 3.8 公尺，已知小直的眼睛距離地面 1.8 公尺，則他應該站在離牆 x 公尺觀賞畫作，才可得最大視角 θ(銳角)。試求：當有最大視角 θ 時，此時 x 值與 $\tan\theta$ 分別為何？

(註：小直眼睛為 A 點，畫布上緣為 P 點，畫布下緣為 Q 點，視角 $\theta=\angle PAQ$)

阿真欲解決此道問題，算式如下：

令 A 點到牆面垂足為 H，因為銳角 θ 越大，$\tan\theta$ 越大，則由差角公式得：

$$\tan\theta=\tan(\angle PAH-\angle QAH)=\frac{\frac{8}{x}-\frac{2}{x}}{1+\frac{8}{x}\cdot\frac{2}{x}}=\frac{6x}{x^2+16}\cdots\cdots$$

但接下來，阿真不知道如何計算，因此求助數學老師…

身為數學老師的您，請提供阿真**四種**不同的解法(相同概念視為同一種)，並說明如何引導阿真繼續計算求得正確答案。(12 分)

臺北市立大直高級中學 115 學年度第一次專任教師甄選
數學科試題參考解答

一、填充題

1. 3
2. $-\frac{34}{23}$
3. $20+56i$
4. $(\frac{3}{2},16)$
5. 324
6. $-\frac{171}{2}$
7. $(\frac{185}{4},4)$
8. 4
9. $(4,1)$
10. $-12\pi^2+\frac{568}{15}\pi$
11. $\frac{9}{2}$

二、非選擇題

一、

(1)期望值 np ，變異數 $np(1-p)$ ，證明略。

(2)期望值 $\frac{2}{p}$ ，證明略。

二、

略

三、

略