新北市立板橋高級中學 115 學年度 正式教師甄選【數學科】試題卷	准考證號	

一、 填充題(每題 5 分)

1. 將與 105 互質所有正整數由小到大排成一數列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$，則 $a_{2026} =$_____。

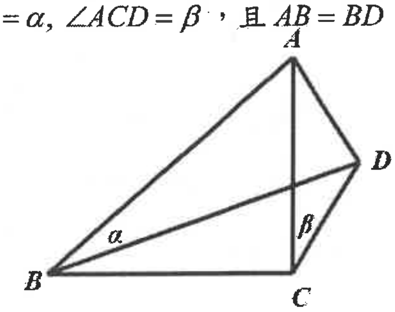
2. 設 x, y, z 是有理數，且 $a=\log\frac{8}{25},\ b=\log 12,\ \log 15 = xa+yb+z$，求數組 $(x,y,z)=$_____。

3. 一袋中有 3 個白球，4 個紅球，5 個黑球。今自袋中取球，每次取一球，取後不放回，若每一球被取到的機會均等，則白球最先被取完，且紅球比黑球先被取完的機率為_____。

4. 多項式 $f(x)$的次數為 10，且滿足 $f(k)=k+\frac{1}{k},\ k=1,2,3,\ldots,11$。

試求 $f(13)$ 之值為_____。

5. 如圖，平面四邊形 $ABCD$ 中，若已知 $\angle ACB=90°,\ \angle ABD=\alpha,\ \angle ACD=\beta$，且 $\overline{AB}=\overline{BD}$，$\sin\alpha=\frac{3}{5},\ \cos\beta=\frac{5}{13}$，則 $\tan\angle ABC=$_____。



6. 設 z 為複數且 $|z|=1$，則 $|z^3-3z-2|$ 的最大值為_____。

7. 平面坐標上有一以原點為圓心的單位圓 C，點 P 為圓 C 上動點，及一定點 $A(2,0)$。以 P 點為中心，將 A 點逆時針旋轉 $90°$ 得點 B，則點 B 的軌跡方程式為 _____。

8. 若 $x>0$，則 $x^3+3x+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^3}$ 的最小值為_____。

9. 已知一組二維數據 (X,Y)，其相關係數為 $\frac{1}{2}$，且 X,Y 的標準差分別為 1,2。

若 $Z=X+Y$，則 (X,Z) 的相關係數為_____。

10. 設多項式函數 $y=f(x)$ 滿足 $f(x)=-8x^3+33x^2-18x+\int_0^x f(t)dt$，求 $f(x)=$_____。

11. 有一個均勻的正四面骰子，其四面點數分別為 1,2,3,4。

重覆擲此正四面骰子，並觀察底面出現的點數，直到出現點數連續四次依序為 1,2,3,4 時停止，試問總投擲次數的期望值為 _____。

12. 在矩形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=3,\ \overline{AD}=4$，$E$ 為 $\overline{AB}$ 上一點，且 $\overline{AE}=1$，現將 ΔBCE 沿 $\overline{CE}$ 折起，使得 B 點在平面 $AECD$ 的投影恰好落在 $\overline{AD}$ 上，則四角錐 $B-AECD$ 的體積為_____。

新北市立板橋高級中學115學年度 正式教師甄選【數學科】試題卷	准考證號	

二、 計算證明題(每題10分)

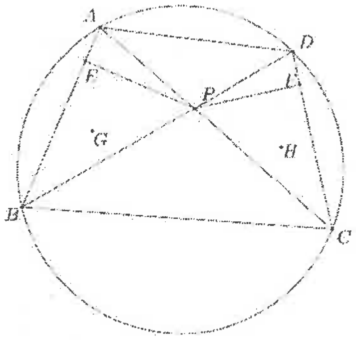
1. 已知實數 x,y,z 滿足 $\begin{cases} x+5=y+z \\ z^2+xy=3z-5 \end{cases}$，試求 x^2+y^2+xy 的最大值及最小值。

2. 已知拋物線 $y=x^2$ 的焦點為 F，過 y 軸正向上一點 M 的直線 L 與拋物線交於 A, B 兩點，O 為原點，且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$。

   (1) 試證：直線 L 恆過一定點。

   (2) 設點 F 關於直線 OB 的對稱點為 C，求四邊形 $OABC$ 面積的最小值。

3. 設 $ABCD$ 為圓內接四邊形，點 P 為其兩對角線的交點。P 在 AB,CD 上投影點分別為 E,F，$\Delta ABP,\Delta CDP$ 的外心分別為 G,H，證明 E,F,G,H 四點共圓。



4. 已知實數函數 $f(x)$ 滿足 $f(0)=1013$，且 $f(x+5)-f(x)\le 3(x+3)$ 以及 $f(x+15)-f(x)\ge 9(x+8)$，對任意實數 x 皆成立，求 $\dfrac{f(2025)}{2026}=?$