台北市立和平高級中學 115 學年度第 1 次正式教師甄選數學科初試試題

一、填充題（一題 6 分，共 84 分）

1. 將 $f(x)=\log_2(3x)$ 的圖形往上平移 2 單位，再以 y 軸為基準水平方向伸縮 3 倍，可得 $g(x)=a\log_3(bx)$ 的圖形，則數對 $(a,b)=$________。

2. 圓上 n 個點，兩兩連成一弦，任三弦在圓內不共點，設這些弦在圓內最多有 a_n 個交點，則 $\sum_{k=5}^{20} a_k=$________。

3. 已知兩數列 $\langle a_n \rangle$ 和 $\langle b_n \rangle$ 滿足 $a_{n+1}=5a_n-4b_n$ 和 $b_{n+1}=a_n+b_n$ ，且 $a_1=1$ ，$b_1=2026$ ，則 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=$________。

4. 設 c 為實數，$f(x)=3x^2+x\cdot\int_{-2}^{2} f(x)dx+c$，$f'(x)$ 為 $f(x)$ 的一階導函數，若 $\int_{-2}^{2} f'(x)dx=-24$，則 $f(x)$ 的各項係數和為________。

5. 若重覆擲一枚不公正的骰子，出現奇數點數的機率是偶數點數的 2 倍，若重覆擲此枚骰子，直到點數和為 3 的倍數才停止，設所需次數的期望值和變異數分別為 a 和 b，則數對 $(a,b)=$________。

6. 在坐標空間中，直線 L_1 和 L_2 在平面 E 上，設 $\overrightarrow{v_1}$ 和 $\overrightarrow{v_2}$ 分別為 L_1 和 L_2 的方向向量，若向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{v_1}$ 和 $\overrightarrow{v_2}$ 的正射影分別為 $(-2,0,4)$ 和 $(-1,1,2)$，A、B 兩點在平面 E 上的投影點為 C、D，則 $\overrightarrow{CD}$ 為________。

7. 設 $\omega=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{4}$，且 $\omega, \omega^2, \omega^3$ 都滿足 $|z-\alpha|\le r$，其中 α 為複數，設 r 的最小值為________。

8. 設 $\dfrac{\pi}{2}\le\theta<\dfrac{3\pi}{2}$，且 $\cos 2\theta<\sin\theta<\sin 3\theta$，則 θ 的範圍為________。

9. 坐標平面上有一圓 $C:(x-4)^2+(y-9)^2=1$，今將 $\Gamma:\dfrac{x^2}{169}-\dfrac{y^2}{144}=1$ 的圖形以點 $(1,5)$ 為中心旋轉，使其中一頂點與圓 C 的距離最短，則此最短距離為________。

10. $\dfrac{\sin x-2\cos x}{2+\sin x}$ 的最小值為________。

11. 已知三個正整數 a、b、c 的最大公因數是 7，最小公倍數是 $2\times3^2\times5^3\times7^4$，則共有________組可能的序列 (a,b,c)。

12. 在三角形 ABC 中，點 D 為 $\overline{BC}$ 的中點，$\angle BAD=2\angle CAD$，$\overline{AB}=8$，$\overline{AD}=5$，則 $\overline{AC}=$ ________。

13. 設空間中 A、B 兩點分別在兩相異平面 E_1 和 E_2 上，且平面 E_1 和 E_2 交於直線 L，若 C、D 兩點在直線 L 上，且 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ ，$\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BD}$ ，若 $\overrightarrow{PQ}=x\overrightarrow{AP}+y\overrightarrow{BQ}+z\overrightarrow{CD}$ ，則 $x+y+z=$________。

14. 若 z_1,z_2,z_3,z_4,z_5 是方程式 $32x^5+16x^4+8x^3+4x^2+2x+1=0$ 的五個相異根，則 $\left|\dfrac{(z_1-i)(z_2-i)(z_3-i)(z_4-i)}{(z_5-i)}\right|$ 的最大值為________。

二、計算題（共 16 分，請寫出詳細的計算過程）

1. 試以符合高中課綱的作法，說明計算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log(8^n+9^n)}{2n+3}$ 的核心概念並寫出詳細的解法。（6 分）

2. 令 $K=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n+1}\dfrac{(2k-1)^2}{n^3}=\int_0^1 f(x)dx=\int_1^3 g(x)dx$ ，試求 $f(x)$ 、$g(x)$ 和 K 的值。（10 分）