

# 臺北市立復興高級中學 115 學年度第一次專任教師甄選

## 數學科教師甄選筆試題目卷

准考證號碼後三碼：\_\_\_\_\_

以下答案皆為計算證明題，須於答案卷上清楚書寫題號及答案。答案須化為最簡分數或有理化。

1. 本份試卷不可使用計算機。
2. 考試完畢，請交回所有試卷並在題目卷右上角寫上准考證號碼後三碼。

本試卷共 3 頁

計算證明題(第 1~5 題每題 6 分，第 6~11 題每題 7 分，第 12 題 15 分，第 13 題 13 分)

1. 已知  $\sqrt{1700} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$ ，且  $0 < x < y < z$ ，且  $x, y, z$  為正整數，滿足上述的整數對  $(x, y, z)$  共有多少組？
2. 設  $x$  為實數，試解  $2^x + 4^x + 8^x = 39$ ， $x = ?$
3. 試求極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right)$ 。
4. 設函數  $y = \frac{\sin 2x - 3}{\sin x + \cos x - 2}$  的最大值為  $M$ ，最小值為  $m$ ，則  $M+m = ?$
5. 已知  $A, B$  兩事件為非空的獨立事件，即  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ ，試證當  $A, B$  兩事件獨立時， $A', B$  亦為獨立事件。  
( $A'$  為  $A$  的補集)

6. 若存在多項式  $f(x)$  使得  $\int_1^x f(t) dt = f(x) + 2x^3 + k$  成立，則常數  $k$  的值為何？

7. 已知橢圓  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ， $P(6,4)$ ， $Q$  為橢圓上任一點， $F_1(-4,0)$ ， $F_2(4,0)$  為橢圓之兩焦點，試求  $\overline{PQ} + \overline{QF_1}$  之最大值。

8. 已知  $n$  為小於 2026 的正整數，求使得  $C_n^{2026}$  為 16 的倍數之最小  $n$  值。

9. 已知正實數  $x, y$  滿足  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$ ，試求  $xy - \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$  的最大值。

10. 將邊長分別為 10、12、14 的三角形各邊中點連接，形成四個小三角形。已知它是一個四面體的展開圖，求這個四面體的體積為何？

11. 有一選舉，甲得 5 票，乙得 4 票，無廢票，試求整個開票過程甲得票數一路領先乙到底的機率。

12. 請以三種高中課綱內使用之方法，計算  $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-4}$  與  $L_2: \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{2}$  兩歪斜線的距離。(每種方式 5 分，共 15 分)

13. (1) 設數列  $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ ，試證明： $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  收斂。(6 分)

(2) 設第(1)小題收斂到定值為  $e$ ，試證明： $e$  是無理數。(7 分)

本試卷結束