高中課程的 *Lagrange* 插值多項式

沈朋裕老師

99.10.13

99 學年度施行的高級中學數學科課程綱要首次引入插值多項式這個主題，然而此觀念橫跨分析、代數與幾何的領域，本文試著從韓信點兵問題（即中國剩餘定理）開始，以高中教學上的範例出發，介紹兩種常見形式的插值多項式，並列出筆者在定期考試中的出題方式以供參考。

一、韓信點兵問題

在國中階段介紹最小公倍數時，常用下面的問題舉例：

(1)某正數 x 除以 3 餘 1、除以 5 餘 1、除以 7 餘 1，求 x 的最小值。
(2)某正數 y 除以 3 餘 1、除以 5 餘 3、除以 7 餘 5，求 y 的最小值。

這兩個問題有一個相似處，就是餘數相同（第(1)題餘數都是 1）或是不足數相同（第(2)題不足數都是 2），解法是用 x 減去此相同的餘數或是加上此相同的不足數後，可知其為 3、5、7 的公倍數，若取最小公倍數即得 x 與 y 的最小值。到了高中階段也會介紹這問題，不過此時會將餘數設計成不規則，在《孫子算經》中有名的例子如下：

某正數 x 除以 3 餘 1、除以 5 餘 2、除以 7 餘 4，求 x 的最小值。

解法一：

$x\equiv 1\pmod 3$、$x\equiv 2\pmod 5$、$x\equiv 4\pmod 7$，因 3、5、7 兩兩互質，知

$$(3,5\times 7)=1,\quad (5,3\times 7)=1,\quad (7,3\times 5)=1，$$

所以存在整數 a_i、b_i（$i=1,2,3$）使得

$$3a_1+35b_1=1,\qquad 5a_2+21b_2=1,\qquad 7a_3+15b_3=1，$$

將此三式分別 mod 3、mod 5、mod 7，可得

$$2b_1\equiv 1\pmod 3,\qquad b_2\equiv 1\pmod 5,\qquad b_3\equiv 1\pmod 7，$$

由此我們可以取值 $b_1=2$、$b_2=1$、$b_3=1$。因此建構

$$x=(35\times b_1)\times 1+(21\times b_2)\times 2+(15\times b_3)\times 4 \quad\text{……………………(1-1)}$$

即 $70\times 1+21\times 2+15\times 4=172$，若取最小的正數，得 $x=172-105=67$。

□

這解法最不能讓學生了解的是(1-1)式中直接建構 x 的方法，觀察這建構式 $35\times b_1$ 、 $21\times b_2$ 、$15\times b_3$ 三數的有趣現象：

$\equiv$	mod 3	mod 5	mod 7
$35\times b_1$	1	0	0
$21\times b_2$	0	1	0
$15\times b_3$	0	0	1

(1-2)

表格(1-2)顯示了$35\times b_1$ 、$21\times b_2$ 、$15\times b_3$ 三數除以 3、5、7 的餘數，這也是爲何 x 能夠滿足題目條件的原因，這種建構 x 的精神，稍後也將出現在 *Lagrange* 形式的插值多項式。古代有人將此解法寫成一首詩，讀者可自行欣賞：

三人同行七十稀，五樹梅花廿一枝；
七子團圓正半月，除百零五便得知。

解法二：

因 x 除以 3 餘 1，所以 $x=3\times q_1+1$ ，再將 q_1 除以 5 得餘數 b，
所以

$$x=3\times(5\times q_2+b)+1=3\times5\times q_2+3\times b+1 ,$$

再將 q_2 除以 7 得餘數 a，所以 $x=3\times5\times(7\times q_3+a)+3\times b+1$，
即

$$x=3\times5\times7\times q_3+3\times5\times a+3\times b+1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(1-3)}$$

其中 a、b 將由剩下的兩條件決定：因 x 除以 5 餘 2，所以$(3\times b+1)-2$是 5 的倍數，可取 b 值爲 2，得 $x=3\times5\times7\times q_3+3\times5\times a+7$；另因 x 除以 7 餘 4，所以$(15\times a+7)-4$是 7 的倍數（即$a-4$是 7 的倍數），可取 a 值爲 4，所以 $x=3\times5\times7\times q_3+67$ ，即 x 最小值爲 67。 □

這種經連續的除法、餘數的假設，一步一步地由條件決定每個係數，是高中生普遍較能接受的解法，事實上(1-3)式仍然是一種建構 x 的方法，只是有別於(1-1)式另需由條件求其係數。同樣的想法，稍後也將出現在 *Newton* 形式的插值多項式，而從上述範例看來，雖然形式不同但其結果相同。

現將此題以多項式的形式表達：

多項式 $f(x)$ 除以 $x-3$ 餘式爲 1、除以 $x-5$ 餘式爲 2、除以 $x-7$ 餘式爲 4，則滿足此條件的最低次多項式 $f(x)$ 爲何？

這時解法一的(1-1)式可改變成

$$f(x)=\frac{(x-5)(x-7)}{(3-5)(3-7)}\times 1+\frac{(x-3)(x-7)}{(5-3)(5-7)}\times 2+\frac{(x-3)(x-5)}{(7-3)(7-5)}\times 4$$

這個建構式中含有

$\pi_1(x)=\dfrac{(x-5)(x-7)}{(3-5)(3-7)}$ 、 $\pi_2(x)=\dfrac{(x-3)(x-7)}{(5-3)(5-7)}$ 與 $\pi_3(x)=\dfrac{(x-3)(x-5)}{(7-3)(7-5)}$ 三部分，比較建構(1-1)式的方法，出現類似表格(1-2)的想法：

＝	$x = 3$	$x = 5$	$x = 7$
$\pi_1(x)$	1	0	0
$\pi_2(x)$	0	1	0
$\pi_3(x)$	0	0	1

(1-4)

如果我們將 3、5、7 寫成 x_1 、 x_2 、 x_3 等符號，那麼可以簡化表格(1-4)的結果： $\pi_i(x_j)=\delta_{ij}$ ，其中 δ_{ij} 是 Kronecker delta，意指若 $i = j$ 則 $\delta_{ij} = 1$，而若 $i\neq j$ 則 $\delta_{ij} = 0$。如果我們觀察所有次數小於或等於 2 次的實係數多項式所成的集合，不難發覺 $\pi_1(x)$ 、 $\pi_2(x)$ 與 $\pi_3(x)$ 形成一組基底，亦即任意次數小於或等於 2 次的實係數多項式，均可表示成 $\pi_1(x)$ 、 $\pi_2(x)$ 與 $\pi_3(x)$ 的線性組合，而且這組基底從某個角度來看還是正交的！

此外，解法二的(1-3)式可改變成

$$f(x)=a(x-3)(x-5)+b(x-3)+c\,,$$

$f(3)=1$ 、 $f(5)=2$ 、 $f(7)=4$ 三條件可以求得 a、b、c 的值，事實上，這種建構方法經常出現在高中解題中，特別是求餘式時。而此處的基底可由 $\{1,\ (x-3),\ (x-3)(x-5)\}$ 組成，事實上，若由線性代數的角度去觀察，我們可以用矩陣的形式表達它們之間的關係。

二、*Lagrange* 形式的插值多項式

儘管歷次修改高中數學的課綱內容，在「對數表」一節中還是會介紹「內插法」，舉一例說明：

若已知$\log 6.3 \approx 0.7993$、$\log 6.4 \approx 0.8062$，試用內插法求$\log 6.33$的近似值至小數點後第四位。基本上我們是將對數函數曲線在 6.3～6.4 之間用直線來近似，所以得到

$$\frac{y-0.7993}{6.33-6.3} = \frac{0.8062-0.7993}{6.4-6.3}$$

其中 y 即為$\log 6.33$的近似值。這個例子已經點出了「插值多項式」的目的，那就是我們能否將一個函數，藉由某些在此函數圖形上的節點(nodes)坐標，用一個多項式來近似這函數？此多項式即稱為插值多項式，最後剩下的問題有兩個：形式與誤差。

假設$\mathrm{R}_n[x]$表示所有次數小於或等於 n 的實係數多項式所成的集合，現在我們用一個定理來敘述 *Lagrange* 形式的插值多項式：

> 設x_0、…、x_n是$n+1$個相異數，則對任意的實數y_i（$i=0, \ldots, n$）必存在唯一的$P(x) \in \mathrm{R}_n[x]$，使得$P(x_i)=y_i$（$i=0, \ldots, n$）………………(2-1)

證明：

若$n=0$，則取$P(x)=y_0$（0 次多項式）；若$n \geq 1$，則定義

$\pi_i(x) = \dfrac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$，用連乘符號表示則為

$\pi_i(x) = \prod\limits_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \dfrac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}$，因此我們有類似表格(1-4)的結果：$\pi_i(x_j)=\delta_{i\,j}$

（若 $i=j$ 則 $\delta_{i\,j}=1$，而若 $i \neq j$ 則$\delta_{i\,j}=0$）。

因此令

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i\, \pi_i(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2\text{-}2)$$

很明顯，$P(x_i)=y_i$（$i=0, \ldots, n$）。若$Q(x) \in \mathrm{R}_n[x]$，也滿足$Q(x_i)=y_i$（$i=0, \ldots, n$），則定義$F(x)=P(x)-Q(x)$，觀察$F(x)$是一個至多 n 次的實係數多項式，但$F(x)$卻有x_0、…、x_n等$n+1$個相異實根，所以$F(x)$是零多項式，如此我們得到唯一性。 □

現在先用一個$n=2$的例子說明 *Lagrange* 形式的插值多項式，至於一般函數用插值多項式來近似的誤差，等到 *Newton* 形式的插值多項式介紹後再說明：

設多項式函數 $y=f(x)$ 的圖形通過 $(0,1)$ 、 $(1,1.5)$ 、 $(2,2.25)$ ，試求出滿足此條件最低次的多項式。

$$f(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}\times 1+\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}\times 1.5+\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}\times 2.25$$
$$=\frac{1}{8}(x^2+3x+8)$$

讀者應可看出 $(0,1)$ 、 $(1,1.5)$ 、 $(2,2.25)$ 三點也是 $y=1.5^x$ 圖形上的三點，若先不計算兩者的誤差，單純用電腦繪製這兩函數圖形，那麼在區間〔0, 2〕內大概很難看出有何差異，但在〔0, 2〕的外面就可明顯看出兩者的不同了。理論上，給予 $n+1$ 個節點坐標，我們就一定可以計算出直觀易懂的 n 次 *Lagrange* 插值多項式(2-2)，那麼爲什麼還需要其他形式的插值多項式？基本上，每一型的插值多項式都有其目的，*Lagrange* 插值多項式的問題在於「計算」，試想如果我們多加一個節點坐標，那麼整個 *Lagrange* 形式插值多項式的結構將整個改變，我們能否期待每當增加一個節點坐標時，可用先前的結果只需增加一項即得新的插值多項式，如此一來在計算上就會得到許多方便了。

三、*Newton* 形式的插值多項式

延續上一節最後一段的想法，且爲了方便起見，節點坐標假設爲 (x_i, y_i) ，其中 $i=0,\ldots,n$ 。我們將依定理(2-1)，定義一些特別的符號：多項式 P_0 滿足

$P_0(x_0)=y_0$ ；P_{01} 滿足 $P_{01}(x_0)=y_0$、$P_{01}(x_1)=y_1$；P_{12} 滿足 $P_{12}(x_1)=y_1$、$P_{12}(x_2)=y_2$ ；

P_{135} 滿足 $P_{135}(x_1)=y_1$ 、 $P_{135}(x_3)=y_3$ 、 $P_{135}(x_5)=y_5$ ；……以此類推。也就是說，

從$\{0,\ldots,n\}$中任取 $k+1$ 個相異的數 $i_0,\cdots,i_k$ ，由定理(2-1)知，存在唯一的 k 次

多項式 $P_{i_0\cdots i_k}$ 滿足 $P_{i_0\cdots i_k}(x_{i_j})=y_{i_j}$ （其中 $j=0,\ldots,k$ ， $0\le k\le n$ ）。

現在回到定理(2-1)，從因式定理的角度觀察，$P_{01\cdots k}(x)-P_{01\cdots k-1}(x)$ 有 k 個相異實根 x_0 、 x_1 、…、 x_{k-1} ，故存在實數 $f_{01\cdots k}$ 滿足

$$P_{01\cdots k}(x)=P_{01\cdots k-1}(x)+f_{01\cdots k}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1}) \quad (k\ge 1)$$

（ $P_0(x)$ 爲零次多項式），我們若使用遞迴的想法，上式可得

$$P_{01\cdots k}(x)=f_0+f_{01}(x-x_0)+\cdots+f_{01\cdots k}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})\ \ldots\ldots\ldots(3\text{-}1)$$

其中 $f_0, f_{01}, \cdots, f_{01\cdots k}$ 是待決定係數，分別稱為第 0 階、第 1 階、…、第 k 階差商（divided differences）；而(3-1)式稱為 *Newton* 形式的插值多項式。（讀者是否發現，此種對於 $P(x)$ 建構的想法類似於第一節解法二的方式）

此外我們特別觀察下式：

$$P_{01\cdots k}(x) = \frac{(x-x_0)P_{1\cdots k}(x) - (x-x_k)P_{0\cdots k-1}(x)}{x_k - x_0} \quad（其中 1 \le k \le n）\cdots\cdots\cdots(3\text{-}2)$$

（令上式右邊為 $F(x)$，很明顯 $F(x) - P_{01\cdots k}(x)$ 為次數最多 k 次的多項式，但 $F(x) - P_{01\cdots k}(x)$ 有 $k+1$ 個相異實根 $x_0, \cdots, x_k$，因此 $F(x) - P_{01\cdots k}(x)$ 為零多項式）

此時我們也可用同樣方法定義 $P_{1\cdots k}(x)$ 的係數 $f_1, f_{12}, \cdots, f_{1\cdots k}$，由(3-2)式的首項係數可以得到

$$f_{01\cdots k} = \frac{f_{1\cdots k} - f_{0\cdots k-1}}{x_k - x_0}$$

這意味著我們可以用表格的方法，更有效率地計算每一階差商，進而得到 *Newton* 形式的插值多項式。

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	……	$k=n$
x_0	f_0				
		f_{01}			
x_1	f_1		f_{012}		
				……	
		f_{12}			
			……	……	$f_{01\cdots n}$
x_2	f_2				
		……		……	
			$f_{n-2,n-1,n}$		
……	……				
		$f_{n-1,n}$			
x_n	f_n				

再用一個例子來說明：

多項式$P(x)$的次數至多三次，且滿足$P(0)=1$、$P(1)=1.5$、$P(2)=2.25$、$P(3)=3.375$，試求$P(1.5)=?$

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$x_0=0$	$f_0=1$			
		$f_{01}=\frac{1}{2}$		
$x_1=1$	$f_1=1.5$		$f_{012}=\frac{1}{8}$	
		$f_{12}=\frac{3}{4}$		$f_{0123}=\frac{1}{48}$
$x_2=2$	$f_2=2.25$		$f_{123}=\frac{3}{16}$	
		$f_{23}=\frac{9}{8}$		
$x_3=3$	$f_3=3.375$			

$$P_{012}(x)=1+\frac{1}{2}(x-0)+\frac{1}{8}(x-0)(x-1)$$

$P_{0123}(x)=1+\frac{1}{2}(x-0)+\frac{1}{8}(x-0)(x-1)+\frac{1}{48}(x-0)(x-1)(x-2)$，因此

$P_{012}(1.5)=1.84375$、$P_{0123}(1.5)=1.8359375$。

四、插值多項式的誤差

現在回到一般的函數$f(x)$，設其定義在實數軸上的一閉區間$[a,b]$，x_0、…、x_n是$[a,b]$上的$n+1$個相異數，令$y_i=f(x_i)$（$i=0,\ldots,n$），由定理(2-1)知，存在唯一的$P(x)$（次數至多n次的多項式），使得$P(x_i)=y_i$。我們將包含$\{x_0,\ldots,x_n\}$的最小閉區間寫成$I(x_0,\cdots,x_n)$，對那些異於x_i（$i=0,\ldots,n$）的x考慮$f(x)-P(x)$，其絕對值可稱爲誤差，若$f(x)$沒有任何條件，我們可以很容易設計函數$f(x)$除在節點x_i之外，使其餘的點x誤差變得很大，下面定理依循定理(2-1)的符號給了一個例子：

> 假設f有$(n+1)$階連續導數，對任意實數$\bar{x}$，必存在$\xi\in I(x_0,\cdots,x_n,\bar{x})$，滿足$f(\bar{x})-P(\bar{x})=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(\bar{x}-x_0)(\bar{x}-x_1)\cdots(\bar{x}-x_n)$………　…………(5-1)

證明：

我們用(3-1)的 *Newton* 形式插值多項式 $P_{01\cdots n}(x)$ 來說明此定理，這個多項式會滿足 $P_{01\cdots n}(x_i)=y_i$（$i=0,\ \dots\ ,n$）。現在再增加一個節點 $(\bar{x},\ f(\bar{x}))$，

由(3-1)式知，

$$P_{01\cdots n+1}(x)=P_{01\cdots n}(x)+f[x_0,x_1,\dots,x_n,\bar{x}](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)$$

定義

$$F(x)\equiv f(x)-P_{01\cdots n+1}(x)=f(x)-P_{01\cdots n}(x)-K(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)$$

，此處 $K=f[x_0,x_1,\dots,x_n,\bar{x}]$，所以 $F(x)$ 有 $(n+2)$ 個相異實根 $x_0,x_1,\dots,x_n,\bar{x}$，

由 *Rolle* 定理知，$F'(x)$ 在 $I(x_0,\cdots,x_n,\bar{x})$ 區間內，至少有 $(n+1)$ 個相異實根；

再使用 *Rolle* 定理知，$F''(x)$ 在 $I(x_0,\cdots,x_n,\bar{x})$ 區間內，至少有 n 個相異實根；

如此連續地使用 *Rolle* 定理，$F^{(n+1)}(x)$ 在 $I(x_0,\cdots,x_n,\bar{x})$ 區間內，至少有 1 個實根 ξ，也就是存在 ξ 使得 $F^{(n+1)}(\xi)=0$，而 $P_{01\cdots n}(x)$ 是 n 次多項式所以其 $(n+1)$ 階導數爲零多項式，故得 $f^{(n+1)}(\xi)-K\cdot(n+1)!=0$，即 $K=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$。

因 $F(\bar{x})=0$，所以

$$f(\bar{x})-P_{01\cdots n}(\bar{x})=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(\bar{x}-x_0)(\bar{x}-x_1)\cdots(\bar{x}-x_{n-1})(\bar{x}-x_n) \qquad \square$$

現在用常用對數 $f(x)=\log x$ 的例子說明誤差，給近似值 $\log 2\approx 0.3010$、$\log 2.4\approx 0.3802$、$\log 3\approx 0.4771$，求 $\log 2.6$ 的近似值

	$k=0$	$k=1$	$k=2$
$x_0=2$	0.3010		
		0.1980	
$x_1=2.4$	0.3802		-0.0365
		0.1615	
$x_2=3$	0.4771		

$P(x)=0.3010+0.1980(x-2)-0.0365(x-2)(x-2.4)$

將 $x=2.6$ 代入上式得 $\log 2.6$ 的近似值 $=0.41542$。而 $f'''(x)=\dfrac{2}{x^3\cdot\ln 10}$，所以此近似值的最大誤差爲 $\dfrac{2}{2^3\cdot\ln 10}\times 0.6\times 0.2\times 0.4\approx 0.00087$。

五、*Hermite* 插值多項式

比 *Lagrange* 插值多項式更一般的形式是 *Hermite* 形式的插值多項式。*Lagrange* 形式是以 $n+1$ 個點坐標 (x_i, y_i)，用一個 n 次的多項式去近似，而 *Hermite* 形式是以 $n+1$ 個點坐標 (x_i, y_i) 以及曲線在這些點上的切線斜率 m_i，用一個 $2n+1$ 次的多項式去近似，表面上看來，更多的條件本來就可以用「更好」的多項式去近似，但是在實際的應用上卻與電腦的字形有關，包含 True type、PostScript 等字形均由 Bézier 曲線組成，而 Bézier 曲線即與 *Hermite* 插值多項式有關。

先回到 *Lagrange* 插值多項式的符號，即定義 $\pi_i(x)=\prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\dfrac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}$，這樣的定義是爲了滿足 $\pi_i(x_j)=\delta_{i\,j}$，而現在多了切線斜率 m_i 的條件，我們希望近似多項式的形式是

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i\, h_i(x)+\sum_{i=0}^{n} m_i\,\overline{h_i}(x)\,,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5\text{-}1)$$

其中

$$h_i(x_j)=\delta_{i\,j}\ 、\ \overline{h_i}(x_j)=0\ ，\ h_i'(x_j)=0\ 、\ \overline{h_i}'(x_j)=\delta_{i\,j}\,,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5\text{-}2)$$

當然，(5-2)式是來自於(5-1)式中題目的條件限制，至於如何得到這些 h_i、$\overline{h_i}$ 呢？

這一切可以從觀察 $\pi_i(x)=\prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\dfrac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}$ 開始，只是因爲 $\pi_i(x)$ 的次數僅 n 次，所以我們使用 $\left(\pi_i(x)\right)^2$ 更符合現在的需要，而定義兩個 $2n+1$ 次多項式：

$$h_i(x)=r_i(x)\cdot\left(\pi_i(x)\right)^2\ 、\ \overline{h_i}(x)=s_i(x)\cdot\left(\pi_i(x)\right)^2,$$

其中 $r_i(x)$、$s_i(x)$ 均爲一次多項式，爲使其滿足(5-2)，我們由 $\pi_i(x_i)=1$ 得到

$$r_i(x_i)=1 \text{ 、 } r_i'(x_i)+2\,\pi_i'(x_i)=0$$
$$s_i(x_i)=0 \text{ 、 } s_i'(x_i)=1$$

而後藉由線型函數係數的假設，可得

$$r_i(x)=1-2\,\pi_i'(x_i)\cdot(x-x_i) \text{ 、 } s_i(x)=x-x_i$$

最後，類似 *Lagrange* 插值多項式的形式，*Hermite* 形式可寫成

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i\, h_i(x)+\sum_{i=0}^{n} m_i\, \overline{h_i}(x)$$

其中 $h_i(x)=\left(1-2\,\pi_i'(x_i)\cdot(x-x_i)\right)\cdot\left(\pi_i(x)\right)^2$ 、 $\overline{h_i}(x)=\left(x-x_i\right)\cdot\left(\pi_i(x)\right)^2$ ，而 y_i 與 m_i 分別是這些點在 x_i 的函數值與一階導數的值。試舉一例說明：

> 設 $f(x)=\log_{10} x$ ，若已知下列近似值 $f(2)=0.301030$、 $f'(2)=0.217147$ 、 $f(3)=0.477121$、 $f'(3)=0.144765$、 $f(4)=0.602060$、 $f'(4)=0.108574$，請分別用 *Lagrange* 與 *Hermite* 插值多項式計算 $f(2.4)$ 的近似值。

解：

因 $\pi_0(x)=\dfrac{(x-3)(x-4)}{(2-3)(2-4)}$ 、 $\pi_1(x)=\dfrac{(x-2)(x-4)}{(3-2)(3-4)}$ 、 $\pi_2(x)=\dfrac{(x-2)(x-3)}{(4-2)(4-3)}$

$$L(2.4)=0.301030\times\frac{(-0.6)\times(-1.6)}{(-1)\cdot(-2)}+0.477121\times\frac{0.4\times(-1.6)}{(1)\cdot(-0)}+0.602060\times\frac{0.4\times(-0.6)}{(2)\cdot(1)}$$

$$=0.3776\,05,$$

另外，因 $\pi_0'(2)=\dfrac{-3}{2}$ 、 $\pi_1'(3)=0$ 、 $\pi_2'(4)=\dfrac{3}{2}$ ，所以

$$h_0(x)=(3x-5)\cdot\left(\pi_0(x)\right)^2 \text{ 、 } h_1(x)=\left(\pi_1(x)\right)^2 \text{ 、} 3\,h_2(x)=(-3x+13)\cdot\left(\pi_2(x)\right)^2$$

$$\overline{h_0}(x)=(x-2)\cdot\left(\pi_0(x)\right)^2 \text{ 、 } \overline{h_1}(x)=(x-3)\cdot\left(\pi_1(x)\right)^2 \text{ 、 } \overline{h_2}(x)=(x-4)\cdot\left(\pi_2(x)\right)^2$$

$$\begin{aligned} H(2.4)&=0.301030\times0.50688+0.477121\times0.4096+0.602060\times0.08352\\ &\quad-0.217147\times0.09216-0.144765\times0.24576-0.108574\times0.02304\\ &=0.380232\,. \end{aligned}$$

□

最後附上 $\log_{10} 2.4$ 的近似值 0.3802112417...，讀者應可一眼看出兩者的差異。

六、定期考的試題

由於 99 課綱第一年實施，所以新增加的內容沒有考古題可以參考，下面是建中數理資優班今年高一第一次定期考的題目，希望高中教學先進不吝賜教：

設 a, b, c 爲相異實數，多項式 $f(x)=$

$$\frac{(a+1)}{(a-b)(a-c)}(x-b)(x-c)+\frac{(b+1)}{(b-c)(b-a)}(x-c)(x-a)+\frac{(c+1)}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b)$$ ，

則下列敘述何者正確？

(1) $f(x)$ 是二次多項式

(2) $f(x)$ 是零次多項式

(3) $f(99)=100$

(4) $f(99)=1$

(5)可以找到 ℓ, m, n 三實數，使得 $f(x)=\ell(x-b)(x-c)+m(x-b)+n$

建中這幾年針對高二實施選修課程中，有一門「數學建模」課程，雖然高中生能使用的數學知識有限，但可由此引導學生，對於現存日常生活問題與既有數學知識的連結，此課程提供了另一種異於傳統形式的教學方式。其中，*Lagrange* 形式的插值多項式即爲一常用的工具，也藉以告訴學生，從中國剩餘定理出發介紹 *Lagrange* 與 *Newton* 形式的插值多項式並非唯一的觀點，而學生也可能因此反思，許多數學上的定義定理的來源與去向，進而提升學生對數學的興趣。有關高中課程的插值多項式，筆者另將於數學傳播期刊有專文討論，本篇著重在高中課程教學實例，另文尚包含 *Newton* 插值多項式與演算法、插值多項式近似的意義，及歷年課綱增減的比較，有興趣的讀者亦可參考。