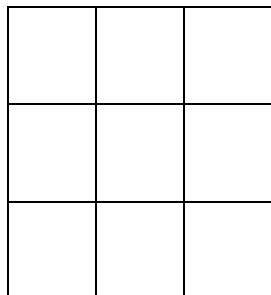


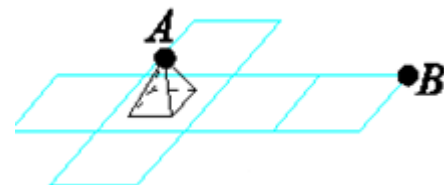
# 臺南市立沙崙國際高級中學高中部 115 學年度第 1 次教師甄選數學科試題卷

## 一、填充題(60%)

1. 已知  $|\log x| = ax + b$  的三個實根成等比且公比為 2，試求  $10^b$  的值。
2. 如下圖，在  $3 \times 3$  方格中，隨機塗上紅色、黃色及綠色，且每種顏色各占 3 格，試求出現「賓果」(即某一橫列、直行或對角線的颜色完全相同)的機率。



3. 設實數  $x$ 、 $y$  滿足  $x^2 + y^2 = 4$ ，試求  $x^3 + y^3 - 3xy$  的最大值。
4. 設複數  $z$  滿足  $z^{10} = 1$  且  $z \neq 1$ ，試求  $\sum_{k=1}^9 \frac{1}{1-z^k}$ 。
5. 設  $n$  為正整數，若  $x^n$  除以  $(x-2)(x-3)(x-4)$  的餘式為  $R(x)$ ，試求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R(-1)}{R(0)}$ 。
6. 設實係數多項式函數  $f(x) = ax^2 + (2-a)$ ，其中  $-1 \leq a \leq 2$ 。在坐標平面上，令  $\Gamma$  為  $y = f(x)$  與  $x$  軸在  $-1 \leq x \leq 1$  所圍的區域。又令  $V$  為  $\Gamma$  繞  $x$  軸旋轉所得旋轉體的體積。試求體積  $V$  的最大值。
7.  $\langle a_n \rangle$  滿足  $\begin{cases} a_1 = 2, & a_2 = 8 \\ n > 1, & \sqrt{a_n} = \frac{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_{n+1}}}{2} \end{cases}$ ，則  $a_{300} =$ \_\_\_\_\_。
8. 右圖為一邊長 8 的正立方體包裝盒展開圖，在盒底正中央擺上底面正方形邊長為 6，側面腰長為  $3\sqrt{6}$  的四角錐，試問包裝後正四角錐頂點  $A$  與正立方體頂點  $B$  的距離=\_\_\_\_\_。



9. 台南沙崙智慧綠能科學城正在舉辦「智慧自駕車迷宮挑戰賽」，目的是推廣人工智慧與智慧交通的科教應用。小安設計的自駕小車 Tesala (特沙拉) 參賽，並安裝了左、右兩個距離感測器，決策邏輯如下：
  - (1) 當只有正前方有障礙物時，Tesala 會隨機選擇向左轉 (L) 或向右轉 (R)，且機率各為 50%。
  - (2) 統計資料顯示，在沙崙智慧綠能科學城的模擬迷宮中，Tesala 遇到障礙物的情況(事件 0)佔總行駛時間的 30%。

(3)在遇到障礙物的情況下，約有 25% 的機率是左側同時也有障礙物（事件 A）的棘手狀況。

(4)另外，在未遇到障礙物的情況下，仍有約 0.4% 的機率因感測器誤判或環境干擾而顯示「左側有障礙物」。

問題：若某次比賽中，Tesala 突然進行了左轉避障。請填寫在「左側有障礙物」的條件下，Tesala「遇到障礙物」的機率為 \_\_\_\_\_（四捨五入到小數第 3 位）。

10. 二數列 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ 具有 $a_1 = 1$ 、 $b_1 = 1$ ，且 $\forall n \in \mathbb{N}$ ， $\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + 4b_n \end{cases}$ ，求 $a_n + b_n =$ \_\_\_\_\_。

11. 複數平面上 $A(\alpha)$ 、 $B(\beta)$ 、 $C(\gamma)$ ，已知 $\begin{cases} |\alpha - \gamma| = 6 \\ \alpha^2 + 4\beta^2 + 5\gamma^2 - 2\alpha\gamma - 8\beta\gamma = 0 \end{cases}$ ，求 $|\alpha - \beta| =$ \_\_\_\_\_。

12. 空間座標中 $\begin{vmatrix} 0 & x & y & -z \\ -x & 0 & 1 & -1 \\ -y & -1 & 0 & 1 \\ z & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 25$ 的圖形表示二平行平面，則此二平行平面之距離=\_\_\_\_\_。

## 二、計算證明題(20%)

1. 設隨機變數 $X$ 的機率分布為幾何分布 $G(p)$ ，試證隨機變數 $X$ 的期望值 $E(X) = \frac{1}{p}$

2. 空間中有一平面 $E: 2x + 3y - 6z - 24 = 0$ 分別交三軸於 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 三點，問原點 $O$ 與三點所構成之四面體之外接球與內切球半徑的和=\_\_\_\_\_。

## 三、教材教法與課程設計 (20%)

前言：從影像到卷積

影像在電腦眼中是一個巨大的**像素矩陣**。為了從這些數字中找出特徵（例如：邊緣、形狀），電腦會使用一種名為「卷積」(Convolution) 的數學工具。**卷積神經網路** (Convolutional Neural Network, CNN) 是深度學習中極為重要的分支，電腦視覺領域（如人臉識別、自動駕駛）近年來的重大進展皆歸功於此。而這種神經網路的核心特點即為「卷積」運算。

**卷積是什麼？** 卷積是一種數學運算，其功能是對資料（如：訊號、影像）進行**特徵萃取**。在 CNN 中，底層萃取出初階特徵會再送到下一個卷積層進行進階特徵萃取，這種層次化的處理方式大幅增強了神經網路的學習效率。在圖像分類上，CNN 的表現遠優於一般傳統的深度神經網路，因此成為 AI 研究的核心。對於中學階段，我們可將「卷積」簡化為**局部矩**

陣運算的應用。在數學本質上，卷積是「加權平均」(Weighted Average)的具體表現。對於國高中生而言，這是一個認識「權重分配」與「局部特徵提取」邏輯思維的絕佳機會。

探究活動：

### 1. 引導學生理解圖片其實就是一堆數字。

➤ 任務：給予一張  $5 \times 5$  的二值化(黑白)矩陣，數字 1 代表黑，0 代表白。

### 2. 實作挑戰：提供一個特定的卷積核，讓學生在紙上進行運算：

(1) 原始資料：拍指一個包含垂直線條紋的  $5 \times 5$  的二值化(黑白)矩陣。例如： $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(2) 卷積核  $K = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

(3) 運算規則：將  $K$  覆蓋在  $A$  的局部區塊上，對應數字相乘後加總，並將結果填入新的矩陣。將得到的數值填入【特徵圖 B】。

### 3. 發現與討論

(1) 請問您認為【特徵圖 B】應該是如何呈現，理由為何？(5分)

(2) 【特徵圖 B】運算後的結果，哪些地方數值最高？(5分)

(3) 如果學生想偵測「斜線」，身為老師的您又該如何引導他修正題目？(5分)

(4) 或卷積核裡的數字該如何調整？(5分)