# 國立宜蘭高級中等學校115學年度教師甄選
# 數學科題目卷

說明：本試卷共分填充題與計算證明題兩部份。第一部份：填充題占 80 分；第二部份：計算證明題占 20 分。
請使用藍色或黑色原子筆或鋼筆書寫填答於「答案卷」上，依題號作答，修正時應使用修正液（帶）。
答案卷因考生書寫不清、污損等人為因素導致無法批改，由考生自行負責不得有異議。
於試題卷上作答者，不予計分。本試題卷連同答案本一併交回，違規攜出試場者以零分計算。

**第一部份：填充題（共16題，每題5分，占80分）**

1. 設 $P(n)$表示正整數 $n$ 的所有正因數之積，例如:$P(6)=1\times 2\times 3\times 6=36$，若 $P(n)=2^{36}\times 3^{24}\times 7^{12}$ ，求正整數 $n$=____。

2. 已知 $f(3^x)=4x\log_2 3+233$，則 $f(2)+f(4)+f(8)+....+f(2^8)+f(2^9)+f(2^{10})=$____。

3. 設 $a$ 為正整數，平面座標系上三點 $A(-3,1)$、$B(10,2)$、$C(3,3)$經矩陣$\begin{bmatrix}1 & 5\\ 0 & 3a\end{bmatrix}$變換後的點依序為 $A'$、$B'$、$C'$，若$\Delta A'B'C'$為直角三角形，則 $a=$____。

4. 已知橢圓$\Gamma:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$上一動點 $p$ 經二階方陣$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$所定義的線性變換，將點 $P$ 映射到點 $P'$ ，則點 $P'$ 與 $y$ 軸距離的最大值為____。

5. 座標空間中，設 $\overrightarrow{a}=(4,-3,1)$ ， $\overrightarrow{b}=(2,2,k)$ ，若 $\overrightarrow{c}$ 在 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 上的正射影為 $(1,2,2)$ ，則由 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 所張的平行六面體體積為____立方單位。

6. 投擲一公正骰子三次，所得的點數依序為 $a,b,c$。在 $b$ 為偶數的條件下，求方程式 $ax^2-bx+c=0$ 有實數解的機率為____。

7. 解方程式 $\log(6x^3+11x^2-3x-3)=\log(x+1)$ ，則 $x=$____。

8. 在三角形 ABC 中，$5sinA+6cosB=7$ ， $6sinB+5cosA=4$，則 $sinC=$____。

9. 已知一數列$\langle a_n\rangle$之首 $n$ 項和$S_n=n^3+2n^2-503n$，n 為正整數，則 $\sum_{n=1}^{30}|a_n|=$ ____。

10.空間中一直線在 $x+y+z=1$ 上的正射影為 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y \quad\quad =1 \end{cases}$，在 $z=0$ 上的正射影為 $\begin{cases} z \quad\quad\quad\quad =0 \\ x+2y+z=3 \end{cases}$，
求此直線的參數式為____。

11.解聯立方程式 $\begin{cases} log_5 x-2y=1 \\ x \;-\; 5^y \;=6 \end{cases}$ 得到 $x=$ ____。

12.設$x,y\in\mathbb{R}$，若$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2-16x+64}+\sqrt{x^2+y^2-20x-8y+116}+\sqrt{x^2+y^2-8x-12y+52}$
的最小值為___。

13.全校一家為宜蘭高中的校訓，今天將「全、校、一、家、讚」五字重新排列，使原本相鄰的變成不可相鄰，
其中「全、家」兩字相鄰的排法有____種。

14.老師欲從 阿東、阿西、阿南、阿北 四位同學中選一位當值日生，此四人討論之後以「黑白猜」和「剪刀、石頭、布」
來決定由誰當值日生，方式如下：
(1) 首先使用「黑白猜」：直到恰有一人出的手掌方向與其他三人不同，則此人就不必當值日生。
(2) 接著使用「剪刀、石頭、布」：三人出拳比輸贏，直到三人中恰有一人輸時，該位同學就是值日生。
依照上述的規則，則此四人為了決定當值日生人選的猜拳次數期望值為___。

15.已知正四面體$PABC$的邊長為$\sqrt{2}$，頂點$P$對平面$ABC$的對稱點$P'$，頂點$A$對平面$PBC$的投影點$A_0$，則長度$\overline{P'A_0}=$ ___。

16.今將函數$\Gamma: y=x^3+x$向上平移$k$單位成新函數$\Gamma_1$。若$\Gamma$與$\Gamma_1$之公切線斜率大於 $\frac{7}{4}$，則$k$的範圍為____。

**第二部份：計算證明題（共 2 題，每題 10 分，占 20 分）**
***請詳細寫出計算過程**

17. 設 $a,b$ 為兩個大於 2 的數，則 (1) $\frac{b^2}{a-2}+\frac{a^2}{b-2}$ 的最小值為何？ (2) 承(1)，此時 $(a,b)$ 為何？

18. 若$n$為自然數，$f(n)=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{(2k-1)(2k)}$，則$\lim_{n\to\infty}f(n)$ = ___。