

115 學年度臺北市立明倫高中 第一次教師甄試- 數學科

准考證: _____ (姓名: _____)

一 填空題: (12 格, 每格 5 分, 共 60 分, 請將答案化到最簡)

1. 設凸五邊形 $ABCDE$, 其中 $\overline{AB} \parallel \overline{CE}$, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$, $\angle ABC = 120^\circ$, $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 5$, $\overline{DE} = 14$, 求 $\triangle BDE$ 的面積。

2. 設 $x, y, z \in R$, 且 $\begin{cases} x+y+z=3 \\ xy+yz+zx=-9 \end{cases}$, 若 z 的最大值 M , 最小值 m , 求數對 (M, m) 。

3. 有一長方形 $ABCD$ 中, $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 4$, 將此長方形沿對角線 \overline{AC} 折起。若折起後平面 ACD 與平面 ABC 的兩面夾角為 90° , 求 \overline{BD} 的長度。

4. 小明在地面 A 點測得一座山峰仰角為 θ , 當他向山腳前進 150 公尺到達 B 點, 測得山峰仰角為 2θ , 繼續再向山腳前進 50 公尺到達 C 點, 測得山峰仰角為 $90^\circ - \theta$ 。已知 A, B, C 皆在山的同一側, 則山高為多少公尺。

5. 曾老師在兒童節要發糖果給高一忠班的 30 個同學。這些同學分三群, A 群一直說實話, B 群一直說謊話, C 群交替地說實話或謊話。在 C 群中, 每位同學第一個問題可任意地說實話或謊話, 但接續的問題說實話與謊話的回答均與前一題相反。曾老師依序問每個同學同樣的三個問題
 - (1) 你是不是都說實話? 然後老師給了每一位回答[是]的同學一顆糖果, 總共發了 21 顆糖果
 - (2) 你是不是交替地說實話或謊話中的一位? 然後老師給每一位回答[是]的同學一顆糖果, 共發了 12 顆糖果
 - (3) 你是不是都說謊話? 然後老師給每一位回答[是]的同學一顆糖果, 共發了 8 顆糖果

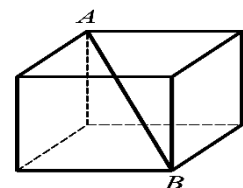
請問曾老師共發給總是說實話的同學多少顆糖果?

6. 若 $0 < x < 1$ 且滿足方程式 $8^{\log_2 x} \cdot x^{\log_2 8x} = 1$, 求 x 。

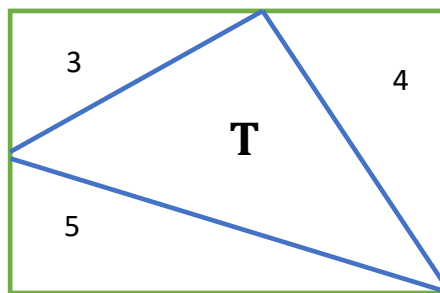
7. 已知矩陣相乘 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 則 $\begin{bmatrix} a & b \\ e & f \end{bmatrix}$ 的反方陣可為下列何者?

- (A) $\begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} y & z \\ v & w \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} x & z \\ u & w \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} z & x \\ w & u \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} z & y \\ w & v \end{bmatrix}$

8. 如下圖是一個長方體, 其中 A, B 是二個頂點。已知 $\overline{AB} = 9$, 若長方體中有一個邊長為 6, 在長方體有最大體積之下, 求此時長方體的表面積。



9. 如下圖，有一個矩形且已知切割三個直角三角形面積分別為 3, 4, 5 試求內部 T 面積。



10. 已知 $A(-3, -2, 1)$ 、 $B(3, 1, 1)$ 、 $C(-1, 0, 2)$ 為空間中三點，求 B 點到直線 AC 的距離。

11. 設坐標平面上，曲線 $y = \log_2(32x)$ 與直線 $x = 8$ ， $x = 17$ 及 x 軸所圍成區域 S 之面積為 P ，曲線 $y = \log_2(x + 7)$ 與直線 $x = 1$ ， $x = 10$ 及 x 軸所圍成區域 T 之面積為 Q 。試求 $P - Q$ 之值。

12. 設 A, B 為複數平面上的兩點，其所對應的複數分別為 z, w 且 $|z| = |w| = 4$ 。已知點 A 以原點 O 為中心逆時針旋轉 120° 後會與點 B 重合，且 z 和 w 為實係數方程式 $x^2 + px + q = 0$ 的兩根，求 $p + q$ 之值。

二 計算題：(5 題，每題 8 分，共 40 分)

1. 已知 $\frac{\sin^4 \theta}{4} + \frac{\cos^4 \theta}{9} = \frac{1}{13}$ ，試求 $\frac{\sin^{2026} \theta}{4^{1013}} + \frac{\cos^{2026} \theta}{9^{1013}} = ?$

2. 已知空間中有一個四面體的四個頂點分別為 $A(0, 0, 2)$ ， $B(3, 6, 0)$ ， $C(0, 0, 0)$ ， $D(6, 3, 0)$ ，平面 E 通過 A 點與 \overline{BD} 中點，且平面 E 與 \overline{BC} 有交點。若平面 E 將此四面體分成兩塊，其中一塊的體積為原四面體的 $\frac{1}{3}$ ，求此平面 E 的方程式。

3. 若二次函數 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 在 $x = 1$ 附近的局部特徵近似於直線 $y = 2x + 1$ ，則三次函數 $y = g(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ 在 $x = 1$ 附近的局部特徵的近似直線方程式為何。

4. 在 $\triangle ABC$ 中，已知頂點 $A(-8, -6)$ ，且兩條中線 \overline{BD} 與 \overline{CE} 分別在 x 軸與 y 軸上，則求
(1) $\triangle ABC$ 面積 (2) $\triangle ABC$ 的外心坐標。

5. 坐標平面上，設 Γ_1 為拋物線 $y = x^2$ ， Γ_2 是將 Γ_1 往右平移 2 單位，再向上平移 4 單位所得的拋物線，試求(1) 已知直線 L 與 Γ_1 ， Γ_2 都相切，求 L 的方程式。
(2) 求經由(1)所求出的直線 L 與 Γ_1 ， Γ_2 所圍成的區域面積。