國立羅東高中 115 學年度第一次教師甄選初試數學科題目卷

一、填充題 (共 16 題，每題 5 分，合計 80 分)

1. 設 $a, b, c \in \mathbb{R}$，且 $abc=1, ab+bc+ca-3abc=0, a\neq 1, b\neq 1, c\neq 1$，求 $\dfrac{1}{1-bc}+\dfrac{1}{1-ca}+\dfrac{1}{1-ab}$ 之值。

2. 求 101^{15} 的百萬位的數字。

3. 求曲線 $y=x^3-4x$ 和其上一點 $P(1, -3)$ 處之切線所圍成之區域面積。

4. 雙曲線 Γ 之兩焦點為 $F_1(0, 0)$, $F_2(2, 2)$ ，已知 $P\left(2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 為雙曲線 Γ 上一點，求雙曲線 Γ 的方程式。

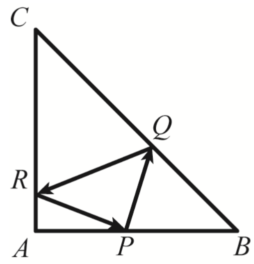
5. 數列 $<a_n>$ 為等差數列，$a_n=\log b_n$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ 。已知$a_6=27, a_{10}=47$，求 $b_1b_2\cdots b_{10}$ 之值。

6. 求函數 $f(x)=(x-2)^3+3(x-2)^2-2(x-2)-6$ 在 $x=-2$ 的一次近似。

7. 曲線 $y=x^2-x+\dfrac{1}{4}$ 和直線 $y=a, a\neq 1$ 相交於 P, Q 兩點，設 $P\left(x_1, a\right), Q\left(x_2, a\right), x_1>x_2$，求 $\log_a|x_1{}^2-\dfrac{1}{4}|-\log_a|x_1+\dfrac{1}{2}|+2\log_a|x_2-\dfrac{1}{2}|$ 之值。

8. 投擲均勻的骰子四次，出現的點數依次為 n_1, n_2, n_3, n_4 ，在坐標平面上若 $A\left(n_1, n_2\right), B\left(n_3, n_4\right)$ ，求 $A\neq B$ 但 $\overline{AB}$ 和直線 $y=x$ 有共同點的機率。

9. 如圖，在等腰直角三角形 ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=4$，點 P 是 $\overline{AB}$ 上異於 A 、 B 的一點，光線從 P 點出發，經 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 反射後又回到 P 點．若光線 QR 經過△ ABC 的重心，則 $\overline{AP}$ ＝？（化成最簡分數）



10. a ，b ，$c\in R$，若 $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix}$ ＝15，求 $a+2b+3c$ 之最大值。

11. 設 A（1，－1，2），B（1，5，－4），於平面 E：$x+y+z-5=0$ 上求一點 P，使｜$\overline{PA}-\overline{PB}$｜為最大，則 P 之坐標為？

12. 設 $i=\sqrt{-1}$，對於任意正整數 n 恆有 $(1-i)^n=a_n+ib_n$ ，其中 a_n， b_n 為實數．已知二階方陣 A 使得 $A\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}$，且在坐標平面上，$P$，$Q$，$R$ 三點經方陣 A 變換後所對之點分別為 $P'(1,2)$， $Q'(4,6)$， $R'(3,8)$，則△ PQR 的面積為？

13. 袋中有編號 1， 2 ，⋯， $\frac{x^2}{m}+y^2=1$ 號的球各 1 顆共 n 顆，自袋中任取 2 球，以隨機變數 X 表示取出 2 球編號的差之絕對值．若 X 的期望值小於 12，則 n 的最大值為？

14. 已知橢圓：$\frac{x^2}{m}+y^2=1$（$m>1$）和雙曲線：$\frac{x^2}{n}-\frac{y^2}{3}=1$（$n>0$）有相同的兩個焦點 F_1,F_2，點 P 是它們的一個交點，則 $\tan\angle F_1PF_2=$？

15. 已知函數 $f(x)=x^3+3ax^2+3bx+c$ 在 $x=2$ 處有極值，圖形在 $x=1$ 處的切線與直線 $6x+2y+5=0$ 平行，則 $f(x)$ 的極大值與極小值的差為？

16. 已知不等式 $\log_2(|2x-1|+|5x-2|)\le 3$ 的解可以寫成 $a\le x\le b$，求 $2a-b=$？

二、計算證明題(共 2 題，每題 10 分，合計 20 分)

1. 若 $\vec{a}, \vec{b}$ 為兩個非零向量，證明：$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影為 $\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}$ 。

2. 拋物線 $\Gamma:(x-1)^2=8(y+1)$ 及直線 $L:x-y=k$，若拋物線 Γ 上恆可求出相異兩點 P, Q，使得 P, Q 兩點對直線 L 成對稱點時，求 k 的範圍。