臺北市立建國高級中學 115 學年度第 2 次正式教師甄選 數學科題目卷

一、填充題（每題 6 分，共計 72 分）

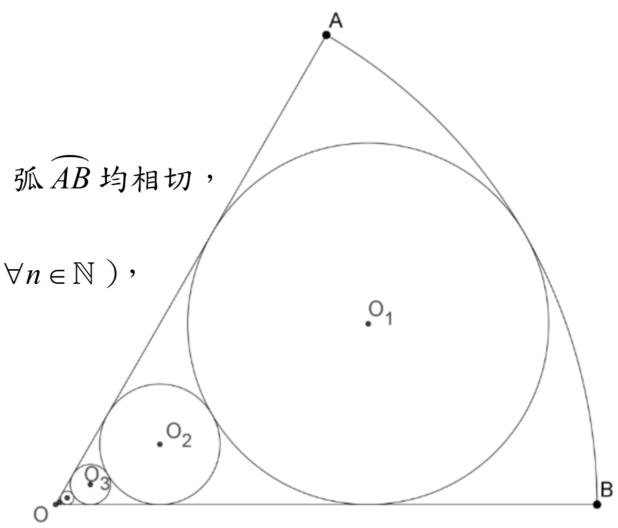
1. 若 t 為實數且滿足方程式 $\sqrt{t^4-4t^3+13t^2-6t+1}+\sqrt{t^4+2t^3+2t^2+2t+1}=5t$，則 t 的值為_________。

2. 空間中有一個六角錐 $O-ABCDEF$，底面為邊長 $2\sqrt{2}$ 的正六邊形 $ABCDEF$，線段 $\overline{OA}$ 垂直底面且 $\overline{OA}=\sqrt{7}+1$，令平面 OBF 和平面 OCE 的二面角為 θ，則 $\sin\theta$ 的值為_________。（答案請簡化為 $\dfrac{\sqrt{a}}{b}$ 的型式，其中 a,b 為正整數）

3. 實係數多項式 $f(x)=4x^2+bx+c$，且滿足 $f(f(1))=f(f(2))=f(f(3))=d$，則數組 $(b,c,d)=$_________。

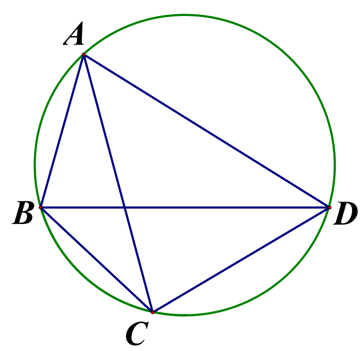
4. 在坐標平面上，橢圓 Γ 的方程式為 $\dfrac{(x-6)^2}{9}+\dfrac{(y-4)^2}{4}=1$。設直線 $L_{m,p}$ 是斜率為 m 且通過 P 點的直線，其中 $m<0$，點 P 為橢圓 Γ 上的點，設直線 $L_{m,P}$ 與 x 軸、y 軸所圍成的封閉三角形面積為 $A_{m,P}$，考慮所有 $m<0$ 及所有橢圓 Γ 上的點 P，則 $A_{m,P}$ 的最小值為_________。

5. 如右圖，扇形 AOB 的圓心角 $\angle AOB=\theta$，$\overline{OA}=1$，圓 O_1 與 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$、弧 $\overset{\frown}{AB}$ 均相切，圓 O_{n+1} 與圓 O_n 外切，並與 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$ 均相切，且令圓 O_n 的面積為 a_n（$\forall n\in\mathbb{N}$），則極限 $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sum_{k=1}^{\infty}a_k}{\theta}$ 的值為_________。



6. 形如 $\dfrac{q}{p}$（其中 $12\le p\le 99$）的最簡分數中，最接近 $\dfrac{3}{11}$ 的最簡分數為_________。

7. 如右圖（示意圖，不代表精準圖形），平面上有一圓內接四邊形 $ABCD$，滿足 $\overline{AB}:\overline{AC}:\overline{AD}=5:10:11$，$\angle ACD=3\angle ACB$，$\angle ACB<45^\circ$，$\overline{BC}<\overline{BD}=48$，則線段 $\overline{BC}$ 的長度為_________。



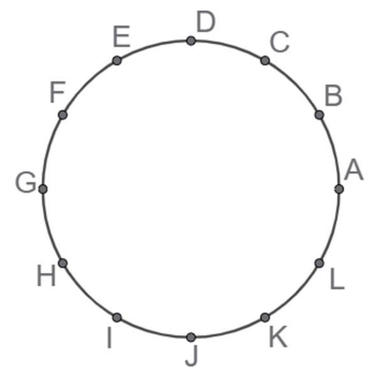
8. 在5×5的方格棋盤共25個格子中，要求每一行和每一列都恰有3個格子被塗黑，則有________種不同的塗法。

9. 在坐標平面上，以原點O為圓心的單位圓上有相異三點A,B,C並依此順序逆時針排列，$\angle AOB=\alpha$，$\angle BOC=\beta$，α,β皆為正實數。若$\alpha+\beta=\dfrac{2\pi}{3}$且平面上恰一點$P$滿足$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$，則$\cos\alpha$的值為________。

10. 若k為整數且$-5\le k\le 5$，將滿足$\big||x+2y|-5\big|+\big||3x+4y|-k\big|\le 10$的所有$(x,y)$畫在坐標平面上會形成一個封閉區域，設此封閉區域的面積為A，且$(A-1)$是10的倍數，則所有滿足題意的整數k為________。

11. 若p,q均為質數，且$p<q$，則滿足$pq\,|\,(3^p+3^q)$的所有數對(p,q)為________。

12. 如右圖，有一圓桌A～L共12人圍坐，兩兩握手配對（每人須與自己以外的另一人握手），並滿足下列兩條件：
(1) 不准交錯握手（例如：若C跟E握手配對，那B跟D就不能握手配對）。
(2) A、D、J三人彼此不握手。
則共有________種不同的握手配對方式。



二、計算題（各題配分列於題後，全部2大題，共計28分）

1. 對於所有的正整數n，數列$\langle a_n\rangle$滿足「$\sqrt{a_n},\sqrt{a_{n+1}},\sqrt{a_{n+1}}$是面積為$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$的等腰三角形三邊長」。請回答下列各小題。

(1) 證明：數列$\langle a_n\rangle$滿足遞迴關係式$a_{n+1}=\dfrac{1}{4}\left(a_n+\dfrac{12}{a_n}\right)$ $\forall n\in\mathbb{N}$。（4分）

(2) 設$a_1=100$，則數列$\langle a_n\rangle$是否收斂？請證明之。（10分）

2. 若兩實數α與β滿足方程組$\begin{cases}\alpha^3-9\alpha^2+30\alpha+1990=0\\ \beta^3-6\beta^2+15\beta-2040=0\end{cases}$，求$\alpha+\beta$的值，並證明之。（14分）

臺北市立建國高級中學 115 學年度第 2 次正式教師甄選 數學科參考答案

一、填充題（每題 6 分，共計 72 分）

題號	1	2	3	4
答案	$\frac{3}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$(-12,\frac{11}{2},\frac{121}{2})$，$(-20,\frac{45}{2},\frac{123}{2})$，$(-16,16,16)$	$54-24\sqrt{2}$
題號	5	6	7	8
答案	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{26}{95}$	30	2040
題號	9	10	11	12
答案	$\frac{13}{14}$	$2, -4$	$(2,3)$，$(3,5)$	104

二、計算題（各題配分列於題後，全部 2 大題，共計 28 分）

題號	1	
	(1)	(2)
答案	略	是，證明略
題號	2	
答案	$\alpha+\beta=5$，證明略	