新竹縣立湖口高中　115 年　第 1 次正式教師甄選

數學科　試題卷

(請考生自填)　准考證號碼：__________________　　姓名：_____________

應試說明：請將各題依序在對應的答案卷題號上作答，不可顛倒錯置，
計算證明題請詳述計算過程或證明過程。

一.填充題(每題 5 分，共 75 分)

1. $aaabbccd$ 八個字母全取排成一列，則 b 的旁邊不能排 c 的排法有______種。

2. 空間座標系中，在平面 $E: x+y+z=6$ 上鋪設三個頂點為 $A(1,1,4)$ 、 $B(2,1,3)$ 、 $C(3,2,1)$ 的三角形磁磚(磁磚厚度不計)，今一雷射光線自點 $P(2a,3a+1,a-1)$ 射出，沿著向量 $(2,1,3)$ 的方向直線前進，若欲使雷射投射的光點落在磁磚鋪設區域（含邊界），則所有可能的動點 P 所成圖形的長度或區域面積為_______。(若圖形為線段則求其長度，若為封閉區域則求其面積)

3. 已知實數 x_1, x_2, y_1, y_2 滿足 $x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}=1$ ， $x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}=1$ ， $x_1x_2+y_1y_2=\frac{1}{2}$ ，

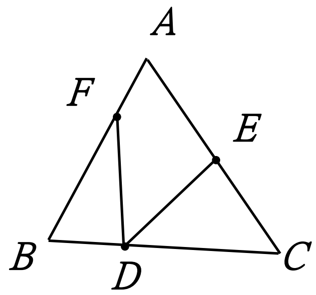
   試求 $|x_1+y_1-1|+|x_2+y_2-1|$ 的最大值為______。

4. 若 $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$ ，則函數 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x+6\sin x-6\sqrt{3}\cos x$ 的最大值為_______。

5. ΔABC 中，已知 $A(6,0)$ ，若 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的內角平分線方程式分別為 $2x-3y+1=0$ 、 $x-2=0$ ，則直線 BC 的方程式為______。

6. 將直線 L 對直線 $y=2x$ 鏡射，然後再繞原點旋轉 $45°$，得到直線 $5\sqrt{2}x-5\sqrt{2}y+1=0$，則原直線 L 的方程式為_______。

7. 在 ΔABC 三邊上的點 D,E,F 滿足 $\overline{AB}=3\overline{AF}$，$\overline{BC}=\frac{5}{3}\overline{DC}$，$\overline{CA}=2\overline{CE}$，其示意圖如右。若 P 是四邊形 $AFDE$ 內一點(不含邊界)使得 $\overrightarrow{DP}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{DC}+k\overrightarrow{DE}$，試求 k 值的範圍為_______。



8. 設 $f(x)=x^9+x^8+x^7+\cdots+x-10$，則 $\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x f(t)dt}{x-1}=$？

9. 設 $(x_1,y_1)=(0,-1)$、$(x_2,y_2)=(1,0)$、$(x_3,y_3)=(0,1)$，
若二實數 a 與 b 使 $D=(y_1-a-bx_1)^2+(y_2-a-bx_2)^2+(y_3-a-bx_3)^2$ 之值為最小，
此最小 D 值為？

10. 設 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$ 為平面上三個非零向量，已知 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 不平行，且 $\overrightarrow{c}=2\overrightarrow{a}+k\overrightarrow{b}$，$k>0$。若 $\overrightarrow{c}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 所張成的平行四邊形面積為 14，$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{c}$ 所張成的平行四邊形面積為 21，求 k。

11. 圓內接四邊形中，$\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=2$、$\overline{CD}+\overline{DA}=9$，令 $\overline{CD}=x$，若 x 的可能值的最大範圍為區間 (a,b)，求該區間的長度 $b-a$ 為何？

12. 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$之值。

13. 已知實數x、y、z滿足$x+y+z=0$且$x^3+y^3+z^3=18$，求$xyz=$__________。

14. 已知非零複數z滿足方程$z^3=4i\bar{z}$，在複數平面上，將所有可能的z作為頂點所形成的凸多邊形面積為__________平方單位。

15. 甲參加某個限定商品的抽獎，已知抽獎方式如下：第一次抽要付100元，每次抽中獎品的機率為$\frac{1}{3}$，若抽中則可拿到限定商品，若沒抽中可以選擇就此放棄抽獎機會，或是比上次多付100元的金額再抽一次。例如：第一次花費100元沒抽中，可再花費200元抽第二次，若第二次沒中則可再花費300元抽第三次，以此類推。假設甲身上有無限的資金且絕不放棄，會持續抽獎直到抽中限定商品為止，則甲所花費金額的期望值為__________元。

二.計算證明題(共 25 分，每題配分標於題後)

1. 甲、乙兩人輪流投擲一枚均勻的硬幣，每局誰先擲出正面誰獲勝，並重新開始玩下一局，他們連玩了數局，並規定前一局的輸家下一局先擲，若甲第 1 局先擲，試回答下列問題：
   (1)第 1 局是甲獲勝的機率為何? (3 分)
   (2)設P_n為第n局是甲獲勝的機率，試求P_{n+1}與P_n的關係式。(3 分)
   (3)第n局是甲獲勝的機率為何?(4 分)

2. 設α,β,γ為互異的複數，在複數平面上，$A(\alpha),B(\beta),C(\gamma)$，且$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$，試證：$\Delta ABC$為正三角形。(15 分)