國立蘭陽女子高級中學115學年度第1次教師甄選數學科試題

填充題(每題5分，滿分100分。請在答案卷$\boxed{\text{第一頁}}$上依照題目順序寫下題號及答案，不須計算過程)

1. a、b、c 為實數，$0 \le x < 2\pi$，已知 $f(x) = a\sin x + b\cos x + c$ 的最大值為3，最小值為－1，且最大值發生在 $x = \dfrac{11\pi}{6}$ 時。求 $(a+bi)^7 =$_______ $-64+64\sqrt{3}i$

2. 投擲一個均勻的骰子，若擲出 1 點或 6 點則不能再投擲骰子，若擲出其他點數則可繼續投擲骰子，在最多投擲 n 次的限制下，擲出 1 點的機率為 p_n，求 $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$ 之值＝_______ $\dfrac{1}{2}$

3. 將1，2，3，…，78，依照下述規律分成 n 組：

   第1組：1

   第2組：2，3

   第3組：4，5，6

   第4組：7，8，9，10

   …

   第 n 組：…，77，78

   若從這 n 組中以均等的機率選一組後，再從中以均等的機率選出一個數字，則選出的數字小於20的機率為________(化為最簡分數) $\dfrac{17}{36}$

4. 求二拋物線 $y^2=4x$ 與 $x^2=2y-3$ 的公切線方程式。 $y=x+1,\ y=-2x-\dfrac{1}{2}$

5. 數列 $\langle a_n \rangle$ 的一般項為 $a_n=\dfrac{q_n}{p_n}$，其中 p_n, q_n 均為自然數，若 $a_n \le 2,\ p_n \le 3$，請由小到大寫出 a_n 的所有可能值。 $\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3},\ 1,\ \dfrac{4}{3},\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{5}{3},\ 2$

6. $f(x)=\sin x(1+\cos x),\ 0<x<2\pi$ 的極大值為 M，極小值為 m，求數對 (M, m)。 $\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{4}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

7. 求 $3\tan 10° + 4\sqrt{3}\sin 10° =$ __________ $\sqrt{3}$

8. $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ a & -2 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} -2 & b \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$，若 $AB=BA$，就 n 為正奇數及正偶數兩種情況，分別求 $(A-B)^n$ 之值。(Hint:可先觀察A^2、B^2)

n 為正奇數時，$(A-B)^n = A-B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 12 & -5 \end{bmatrix}$

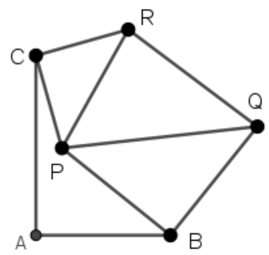
n 為正偶數時，$(A-B)^n = A+B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. 空間中 L_1: $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-4}{1}$, L_x: $\dfrac{x-a}{6}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-7}{-2}$ 交於一點，求L_1, L_2 之交角平分線。

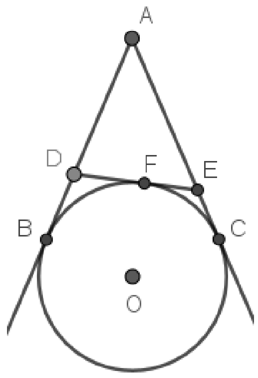
$\dfrac{x-5}{32}=\dfrac{y-1}{23}=\dfrac{z-5}{1}$, $\dfrac{x-5}{-4}=\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z-5}{13}$

10. 若 x 為實數，解方程式 $x=\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}$ ，則 $x=$ __________ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

11. 如圖，$\angle BAC=\angle PCR=\angle PBQ=90°$，$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=4$，$\Delta PCR$、$\Delta PBQ$皆為等腰三角形，若$\overline{PB}:\overline{PC}=5:3$ 且 $\tan\angle RPQ=\frac{2}{\sqrt{5}}$，則$\overline{PC}=$ __________ $\frac{5\sqrt{6}}{6}$



12. 如圖，過圓 O 外一點 A 作兩切線且切點為 B、C，另從$\overline{AB}$上找一點 D 作圓切線且切點為 F 並交$\overline{AC}$於 E，若圓半徑為 5，$\overline{DF}=4$，$\overline{EF}=3$，求ΔADE面積為_________ 420/13



13. $f(x)=\frac{1}{1-x}$，求$\underbrace{f(f(\cdots f(2026)))}_{2026\text{ 個 }f}$ $=$ __________ -1/2025

14. 設 $\frac{1}{2}<a<1$，求$log_8(\sqrt{a+\sqrt{2a-1}}+\sqrt{a-\sqrt{2a-1}})$ $=$ __________ 1/6

15. 求$(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3})^5+8(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3})^3-6(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3})^2-9(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3})^1+8=$ _________ 2

16. 平面過 $A(1，0，0)$與 $B(0，2，0)$，且與 xy 平面夾成60°角，求平面方程式為___________________

$6x+3y\pm\sqrt{15}z=6$

17. 已知 a、b 皆為正實數，且滿足 $a^b=b^a$ 與 $a=106b$ ，則 $\log_{106}(ab)=$______________(化為最簡分數)

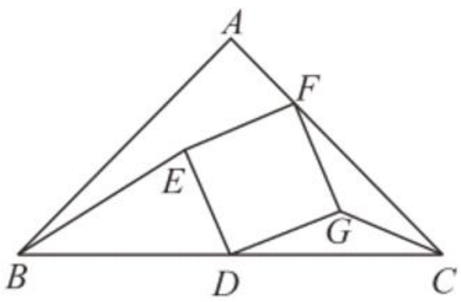
$\dfrac{107}{105}$

18. 如圖所示，等腰直角ΔABC中，$\angle A=90^{\circ}$，D為$\overline{BC}$的中點，

四邊形$DEFG$為正方形，且點F在$\overline{AC}$邊上，若

$\overline{BE}=\sqrt{3}\overline{CG}$，$\overline{BC}=4$，則正方形$DEFG$的面積為__________

$4-2\sqrt{2}$



19. 設R代表坐標平面上由不等式$1-\sqrt{4-y^2}\le x\le 0$所定義的區域，若函數$f(x,y)=3x-y$在區域R上最大值為M，最小值為m，則數對(M，m)＝__________(化為最簡根式) $(\sqrt{3},3-2\sqrt{10})$

20. 已知O為ΔABC之外心，若$5\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{CA}+8\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，求$\cos A$的最小值＝_______ $\frac{\sqrt{6}}{5}$