數學科教師甄選答案卷

一、填充題(每格 5 分，共 80 分)

1 6	2. $k<-1$	3. 35	4. $\frac{13}{30}$
5 $\frac{25}{4}$	6. CDE	7. 50	8. $(\frac{1}{2})^{109}$
9. 317	10. $\frac{27}{25}$	11. -987	12. 83
13. $\sqrt{10}$	14. $\frac{25}{2}$	15. $(3,2,-3)$	16. $\sqrt{5+3\sqrt{2}}$

二、計算證明題(共 20 分，**每題配分標註於題後，請詳述原因及計算過程**)

17. 試證明：任意實係數三次多項式函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$（$a\neq 0$）之圖形均為點對稱圖形　（10 分）

（法一） 此為 108 課綱高一內容

先證明三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cd+d$（$a\neq 0$）都可以經由配方化成

$f(x)=a(x-h)^3+p(x-h)+k$ 的形式

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^3+bx^2+cx+d \\
&= a\left(x^3+\frac{b}{a}x^2\right)+cx+d \\
&= a\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3-\frac{b^2}{3a}x-\frac{b^3}{27a^2}+cx+d \\
&= a\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3+\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)\left(x+\frac{b}{3a}\right)+\left(-\frac{b^3}{27a^2}+\frac{b^3}{9a^2}-\frac{bc}{3a}+d\right) \\
&= a(x-h)^3+p(x-h)+k\text{，}
\end{aligned}
$$

其中 $h=-\dfrac{b}{3a}$, $p=c-\dfrac{b^2}{3a}$, $k=-\dfrac{b^3}{27a^2}+\dfrac{b^3}{9a^2}-\dfrac{bc}{3a}+d=f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)$。

故三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 都可化成 $f(x)=a(x-h)^3+p(x-h)+k$ 的形式。

令 $g(x)=f(x+h)-k=ax^3+px$，可知 $y=g(x)$ 的圖形為 $y=f(x)$ 的圖形向左平移 h 再向下平移 k 得到

又 $g(-x)=-g(x)$，可知 $g(x)$ 是奇函數且 $y=g(x)$ 的圖形對稱原點

故 $f(x)=a(x-h)^3+p(x-h)+k$ 的圖形對稱 (h,k)

因此任意實係數三次多項式函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cd+d$（$a\neq 0$）之圖形均為點對稱圖形

（法二）此為高三數甲內容

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$，$f''(x)=6ax+2b$，$f'''(x)=6a$

令 $f''(x)=0 \Rightarrow x=-\dfrac{b}{3a}$，而 $f'''(-\dfrac{b}{3a})=6a\neq 0$

故點 $\left(-\dfrac{b}{3a}, f(-\dfrac{b}{3a})\right)$ 為 $y=f(x)$ 之反曲點

將座標軸平移，並以 $\left(-\dfrac{b}{3a}, f(-\dfrac{b}{3a})\right)$ 為新原點

設 P 為 $y=f(x)$ 上任一點，並假設 P 之原座標為 (x,y)，座標軸平移後的 P 點新座標為 (X,Y)

則 $\begin{cases} x=X-\dfrac{b}{3a} \\ y=Y+f(-\dfrac{b}{3a}) \end{cases}$

將上式代入 $y=f(x)$ 可得

$$Y+f(-\frac{b}{3a})=a(X-\frac{b}{3a})^2+b(X-\frac{b}{3a})^2+c(X-\frac{b}{3a})+d$$

$$=a(X^3-\frac{b}{a}X^2+\frac{b^2}{3a^2}X)+b(X^2-\frac{2b}{3a}X)+cX+\left\{a(-\frac{b}{3a})^3+b(-\frac{b}{3a})^2+c(-\frac{b}{3a})+d\right\}$$

$$=aX^3+(c-\frac{b^2}{3a})X+f(-\frac{b}{3a})$$

$\Rightarrow\ Y=aX^3+(c-\dfrac{b^2}{3a})X$ 為一奇函數，且以新座標原點成對稱

故三次實係數函數 $y=f(x)$ 的圖形必以其反曲點成點對稱

18. 設正實數 a,b,c,d 滿足 $abcd>a^2+b^2+c^2+d^2$

（1）試證明：$\sqrt[4]{abcd}>2$　（4 分）

（2）試證明：$abcd>a+b+c+d+8$　（6 分）

(1)

因 $abcd > a^2+b^2+c^2+d^2$，由算幾不等式可知 $a^2+b^2+c^2+d^2 \ge 4\sqrt[4]{a^2b^2c^2d^2}$

故 $abcd > 4\sqrt[4]{a^2b^2c^2d^2} \Rightarrow abcd = \left(\sqrt[4]{abcd}\right)^4 > 4\left(\sqrt[4]{abcd}\right)^2 \Rightarrow \sqrt[4]{abcd} > 2$

(2)

設 $abcd < a+b+c+d+8$

可得 $a^2+b^2+c^2+d^2 < a+b+c+d+8$，即

$(a-\frac{1}{2})^2+(b-\frac{1}{2})^2+(c-\frac{1}{2})^2+(d-\frac{1}{2})^2 < 9$

由柯西不等式可知

$$\left[(a-\frac{1}{2})^2+(b-\frac{1}{2})^2+(c-\frac{1}{2})^2+(d-\frac{1}{2})^2\right]\left(1^2+1^2+1^2+1^2\right) \ge \left[(a-\frac{1}{2})+(b-\frac{1}{2})+(c-\frac{1}{2})+(d-\frac{1}{2})\right]^2$$

可得 $(a-\frac{1}{2})+(b-\frac{1}{2})+(c-\frac{1}{2})+(d-\frac{1}{2}) \le \sqrt{4\left[(a-\frac{1}{2})^2+(b-\frac{1}{2})^2+(c-\frac{1}{2})^2+(d-\frac{1}{2})^2\right]}$

$\Rightarrow$

$$\frac{(a-\frac{1}{2})+(b-\frac{1}{2})+(c-\frac{1}{2})+(d-\frac{1}{2})}{4} \le \sqrt{\frac{(a-\frac{1}{2})^2+(b-\frac{1}{2})^2+(c-\frac{1}{2})^2+(d-\frac{1}{2})^2}{4}} < \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

即 $(a-\frac{1}{2})+(b-\frac{1}{2})+(c-\frac{1}{2})+(d-\frac{1}{2}) < 4\cdot\frac{3}{2} \Rightarrow a+b+c+d < 8$

因而有 $2 < \sqrt[4]{abcd} < \frac{a+b+c+d}{4} < \frac{8}{4} = 2$ 矛盾

故可知假設錯誤，因此 $abcd > a+b+c+d+8$