數學科教師甄選試題

一、填充題(每格 5 分，共 80 分)

1. 若 x,y,z 均為實數，則 $2^{x^2+4y+2}+2^{4y^2+2z+2}+2^{z^2+2x+2}$ 的最小值為_________。

2. 已知拋物線 $y=x^2+kx+1$ 與直線 $2x+y+k=0$，兩圖形有兩個交點而且兩交點分別在 y 軸的兩側，則 k 的範圍為__________________。

3. 設有 7 個機器戰警，其戰鬥力分別為： 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255。每兩個戰警可合組成一個新的戰警，且新戰警仍可繼續與其他戰警組合；假設每一次組合戰鬥力的變化規則如下：「戰鬥力為 x 與 y 的兩個戰警，可合組成戰鬥力為 $x+y+xy$ 的新戰警」。已知不論組合的次序如何，經過 6 次的重組之後，最後留下來的唯一戰警之戰鬥力都等於 k，則 $\log_2(k+1)=$___________。

4. 設正整數 x,y,z 出現偶數的機率分別為 $\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{5}$ 且彼此互不影響，試問在 xy 為偶數的條件下，$x+y+z$ 為奇數的機率為______________。

5. 正方形 $ABCD$ 的邊長為 10，P、Q 分別為 $\overline{AD}$、$\overline{BC}$ 上的點，沿 $\overline{PQ}$ 將四邊形 $ABQP$ 翻摺，使得點 A 落在 $\overline{DC}$ 邊上，若欲使得四邊形 $ABQP$ 的面積最小，則 $\overline{AP}=$__________。

6. 調查 8 個學生在端午節當天所吃粽子數量(所吃粽子數量均為正整數)，已知此 8 個學生中最少吃 2 顆粽子，最多吃 6 顆粽子，則由此數據可知下列哪些一定正確？**(全對才給分)**
   (A) 算術平均數 ≤ 4
   (B) 若中位數＝4，則算術平均數 ≤ 4
   (C) 若只有一個眾數且眾數＝2，則算術平均數 ≤ 4
   (D) 標準差 ≤ 2
   (E) 若調查結果，8 位學生共吃了 23 顆粽子（粽子均相同，每人最少吃 2 顆、最多吃 6 顆，且有學生恰好吃 2 顆亦有學生恰好吃 6 顆），則此 23 顆粽子分給 8 位學生，共有 672 種不同分法

7. 坐標空間中一平行六面體，某一底面的其中三頂點為$(-1,2,1)$、$(-4,1,3)$、$(2,0,-3)$，另一面之一頂點在 yz 平面上且與原點距離為 $\sqrt{13}$。滿足前述條件之平行六面體中，最大體積為________。

8. 在坐標平面上的點序列(a_1,b_1)，(a_2,b_2)，(a_3,b_3)，$\cdots$，對所有的$n=1,2,3,\cdots$都滿足$(a_{n+1},b_{n+1})=\left(\sqrt{3}a_n-b_n,\sqrt{3}b_n+a_n\right)$。若$(a_{115},b_{115})=(1,5)$，試問$a_4+b_4=$_________。

9. 小豬四兄弟合資郵購了三百多顆的蘋果，蘋果寄到家裡時，家裡恰好只有豬大哥在。豬大哥想將蘋果均分為四堆，卻發現多了一顆，

(1) 豬大哥吃掉一顆，並拿走剩餘蘋果的四分之一然後離家。

豬二哥回家時發現這些蘋果，不知道豬大哥已經拿走一些，

豬二哥想將蘋果均分為四堆，卻發現多了一顆，

(2) 豬二哥吃掉一顆，並拿走剩餘蘋果的四分之一然後離家。

豬三哥回家時發現這些蘋果，不知道豬大哥豬二哥已經拿走一些，

豬三哥想將蘋果均分為四堆，卻發現多了一顆，

(3) 豬三哥吃掉一顆，並拿走剩餘蘋果的四分之一然後離家。

豬小弟回家時發現這些蘋果，不知道豬大哥豬二哥豬三哥已經拿走一些，

(4) 豬小弟想將蘋果均分為四堆，發現剛好可以平分為四堆。

請問蘋果有_____________顆。

10. 在坐標平面上，考慮二階方陣$A=\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & \frac{-3}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}$所定義的線性變換。對於平面上異於原點$O$的點$P_1$，設$P_1$經$A$變換成$P_2$，$P_2$經$A$變換成$P_3$。假設$P_1$是圖形$y=\frac{1}{2}x^2-5$上的動點，試求$\triangle P_1P_2P_3$面積的最小值_______

11. 設a,b為整數，若多項式x^2+x-1為$ax^{17}+bx^{16}+1$的因式，試求a之值_______

12. 設數列$\langle a_n\rangle$的前n項和為S_n且滿足$S_n=2a_n-1$，$\forall n\in N$。數列$\langle b_n\rangle$滿足$b_1=3$且$b_{n+1}=a_n+b_n$，$\forall n\in N$，試求$\sum_{k=1}^{30}b_k$的末兩位數字為何？ ______

13. 若$x>0$，試求$\dfrac{\sqrt{x^4+x^2+2x+1}+\sqrt{x^4-2x^3+5x^2-4x+1}}{x}$的最小值 ______

14. 正ΔABC的邊長為5，若點P在ΔABC外接圓的劣弧AB上，試求$\Delta APB+\Delta APC$面積的最大值 ______

15. 空間中直線L通過點$P(1,2,-1)$，已知L和$L_1:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{3}=z+3$交於$A$點；$L$和$L_2:\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z+2}{-1}$交於$B$點，試求$B$點座標 ______

16. 設$x,y,z>0$且滿足$\begin{cases}x^2+y^2+xy=2\\y^2+z^2+yz=3\\z^2+x^2+zx=5\end{cases}$，試求$x+y+z$之值 ______

二、計算證明題(共20分，**每題配分標註於題後，請詳述原因及計算過程**)

17. 試證明：任意實係數三次多項式函數$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$（$a\neq 0$）之圖形均為點對稱圖形（10分）

18. 設正實數a,b,c,d滿足$abcd>a^2+b^2+c^2+d^2$

（1）試證明：$\sqrt[4]{abcd}>2$　（4分）

（2）試證明：$abcd>a+b+c+d+8$　（6分）