

臺北市立育成高級中學 100 學年度第一次教師甄選(代理) 數學科試題

說明：試題卷共 2 頁，答案請書寫於答案卷上。書寫答案時，請務必依照題序標明題號。交卷時，請將試題卷及答案卷一併繳回，感謝您的配合！

1. 人類的雙胞胎有兩種類型——同卵雙胞胎和異卵雙胞胎。同卵雙胞胎的性別都是同性，而異卵雙胞胎的性別不一定，男嬰、女嬰機會均等。假設某地區的雙胞胎有 $\frac{2}{5}$ 屬同卵雙胞胎， $\frac{3}{5}$ 屬異卵雙胞胎，已知該地區某夫妻生下的一對可愛的姐妹雙胞胎，則此兩姐妹是異卵雙胞胎的機率為_____。(7 分)

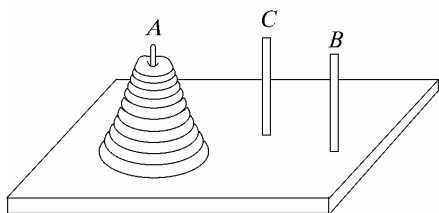
2. 某電腦程式每運行一次都隨機出現一個二進位的 6 位元數 N
 $= \boxed{n_1} \boxed{n_2} \boxed{n_3} \boxed{n_4} \boxed{n_5} \boxed{n_6}$ ，其中 N 的各位數字中， $n_1 = n_6 = 1$ ， $n_k (k = 2, 3, 4, 5)$ 出現 0 的機率為 $\frac{2}{5}$ ，出現 1 的機率為 $\frac{3}{5}$ ，記 $X = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6$ ，則 X 的數學期望值為_____。(7 分)

3. 有等差數列：1, 4, 7, 10, ..., 697, 700，若將所有這些數相乘，求所得的數尾部零的個數_____？(7 分)

(例如：102003000400000，尾部零的個數為 5)

4. 求 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)(k+5)}$ 之值_____。(7 分)

5. 如下圖， A 柱中有 n 個大小不同的圓盤由大而小往上堆疊，若要從 A 柱全部搬移至 B 柱，每次只能搬動一圓盤，且每次都必須先經中間柱（不可由 A 直接放入 B ）且大盤不可放在小盤之上，設共要搬動 a_n 次，若 $a_{n+1} = pa_n + k$ ，求數對 $(p, k) =$ _____。(7 分)



6. 已知 $\log_{18} 9 = a$ ， $18^b = 5$ ，求 $\log_{36} 45 =$ _____ (以 a, b 表示)。(7 分)

7. 已知 θ 是第三象限角，且 $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta = \frac{5}{9}$ ，則 $\sin 2\theta =$ _____。(7 分)

8. 設 $z \in C$, $z \cdot \bar{z} = 4$, 求 $|z + 1 - \sqrt{3}i|$ 的最大值 = _____。(7 分)

9. 求函數 $y = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 8x + 17}$ 的最小值為 _____。(7 分)

此時 x 之值為 _____。(7 分)

10. 設 $x = 5$, 則 $(1+x)^{15} = \sum_{k=0}^{15} c_k^{15} x^k$ 的展開式中, 當 $k =$ _____ 該項的值最大。(7 分)

11. 設拋物線 $\Gamma: y^2 = 4x$ 上不同的兩點 M, N 關於直線 $L: x + 2y = 8$ 對稱, 求直線 \overline{MN} 的方程式為 _____。(7 分)

12. _____ 某高中做校長滿意度調查, 甲、乙二人用簡單隨機抽樣從全校 2000 同學各抽出數位同學, 詢問他們意見, 在 95%信心水準之下, 甲、乙二人各自的滿意度信賴區間分別為 $[0.5, 0.7]$ 、 $[0.45, 0.55]$ 。則下列選項何者正確?
(1) 甲抽樣滿意度比乙抽樣滿意度高 (2) 此次民調, 甲抽樣人數比乙抽樣人數少
(3) 所以全校同學當中, 一定有 200 人對校長滿意 (4) 因為乙的滿意度信賴區間較小, 所以全校同學對校長的滿意度有 95%信心, 會落在此區間 $[0.45, 0.55]$, 而不是 $[0.7, 0.5]$ (5) 全校同學對校長的滿意度有 95%信心, 會落在此區間 $[0.5, 0.55]$ 。(8 分)

13. _____ 設有 n 組 (x_i, y_i) , $1 \leq i \leq n$, 二維數據, 並依此數據繪出散佈圖, 且求出 y 對 x 的迴歸直線方程式為 $y = 2x - 1$, 則下列敘述何者正確?

(1) 此 n 組數據之相關係數必為正 (2) 此 n 組數據之 x 與 y 的相關程度必為高度相關 (3) 若 $x_i > x_j$, 則 $y_i > y_j$ (4) $\bar{X} = \frac{x_1 + \Lambda + x_n}{n} = 1$ (5) 若 $x'_i = 2x_i - 3$,

$y'_i = 3y_i + 2$, 則 y' 對 x' 的迴歸直線方程式斜率為 3。(8 分)