

國立嘉義高級中學 115 學年度第 1 次教師甄選-數學科試題

一、 填充題：(每題 6 分，共 90 分)

1. 有一正立方體的三個面的中心為 $P(8,7,-1)$ 、 $Q(16,-1,3)$ 、 $R(8,1,5)$ ，則此立方體的表面積為_____平方單位。
2. 若 $-\cos^2 x + k \cos x + \frac{3}{2} \geq 0$ 對於任意實數 x 恆成立，則 k 的範圍為_____。
3. 若一直線 L 和 $y = \frac{1}{2x} + x^2$ 恰交於三點，其中兩點的 x 坐標分別為 5、6，則第三個點的 x 坐標為_____。
4. 若 $g(x)$ 為一多項式，且當 $x \geq 0$ 時， $\int_0^x (x-t+1)g(t)dt = \frac{1}{4}x^4 + x^3 + x^2 + 2x$ ，則 $g(x) =$ _____。
5. 若 $a = 2026$ ， $b = 2028$ 且 $ac = 100$ ， $bd = 101$ ，則 $a^{\log b} \cdot b^{\log c} \cdot c^{\log d} \cdot d^{\log a}$ 的值为_____。
6. 凸四邊形 $ABCD$ 的兩對角線 \overline{AC} 與 \overline{BD} 交於 O 點，若三角形 AOB 與三角形 COD 的面積分別為 16 與 25，則四邊形 $ABCD$ 面積的最小值為_____。
7. 設 f 為一定義在正整數上的函數，滿足 $f(n)$ 為正整數 n 的各位數字平方和，例如：
 $f(110) = 1^2 + 1^2 + 0^2 = 2$ 。此外，定義 $\begin{cases} f_1(n) = f(n) \\ f_{k+1}(n) = f(f_k(n)) \end{cases}$ ，其中 k 為任意正整數，則
 $\sum_{k=1}^{2026} [f_k(110) - f_k(107)]$ 的值为_____。
8. 設函數 $f: R \rightarrow R$ ，且同時滿足以下條件：
(1) $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$
(2) 當 $x \rightarrow 0$ 時， $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 2$ 。
則 $f(2) =$ _____。

9. 設 t 為實數，則 $2t^2 - \sqrt{(2t^2 - 6)^2 + (4t - 3)^2}$ 的最大值為_____。

10. 若 a, b, c, d 為正整數， $abcd = 400$ 且 ab, bc, cd, da 為完全平方數，試問序組 (a, b, c, d) 有_____種可能。

11. 已知複數 α 滿足 $\alpha^{2026} = 1$ 且 $\alpha \neq 1$ ，若 $\beta = \frac{1}{1-\alpha}$ ，則 β 的所有可能值之和的實部為_____。

12. $\triangle ABC$ 中， $\overline{BC} = \sqrt{2}$ ， $\overline{CA} = 3 + \sqrt{3}$ ， $\overline{AB} = 2\sqrt{2} + \sqrt{6}$ ，設 Γ 是包含 A, B, C 作其頂點(不一定連續)的最小正多邊形，求 Γ 的面積為_____。

13. 已知有一個三次多項式函數 $f(x)$ 滿足以下三個條件：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 24 \quad (2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x)}{x + 1} = -18 \quad (3) \sum_{n=1}^5 f(n) = -55$$

試求 $f(x)$ 與 x, y 軸所圍成之區域面積為_____。

14. 有一數列 $\langle a_n \rangle$ 定義為： $a_1 = 1$ 且
$$\begin{cases} a_n = a_{\frac{n}{2}} + 1, & \text{當 } n = 2, 4, 6, 8, \dots \\ a_n = \frac{1}{a_{n-1}}, & \text{當 } n = 3, 5, 7, 9, \dots \end{cases}$$

若 $(a_m, a_n) = \left(8, \frac{19}{7}\right)$ ，則 $m - n$ 的值為_____。

15 在 $\triangle ABC$ 中， \overline{CD} 是 $\angle C$ 的內角平分線， D 在 \overline{AB} 上。若 $\overline{BD} = 2$ 且 $\triangle ABC$ 的外心與 $\triangle BCD$ 的內心重合，則 $\overline{AB} =$ _____。

二、證明題：(每一小題各5分，共10分)

已知隨機變數 $X \sim G(p)$ ，請證明：(1) $E(X) = \frac{1}{p}$ 。(2) $Var(X) = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p} - 1\right)$ 。