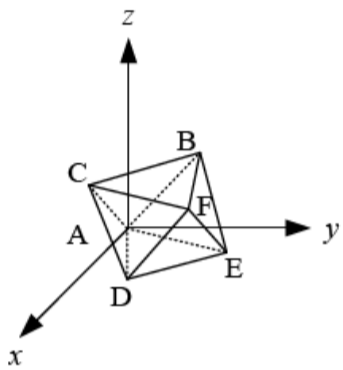


115 學年度國立鳳山高級中學教師甄選初試筆試試題【數學科】

答題：請依題序作答，切勿跳題回答

一、 填充題，每題 6 分，共 72 分

1. 若 m, n 為正數，且 $m^3 + 8n^3 + 18mn = 27$ ，試求： m^3n 的最大值為_____。
2. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ， $a, b, c, d \in \{0, 1, -1, -2\}$ ，求 A^{-1} 不存在的機率為_____。
3. 正八面體 $ABCDEF$ 的邊長為 2，如圖，已知 A 為原點， A, D, E 為 xy 平面上的點， B 為 yz 平面上的點，則點 B 到 y 軸的距離=_____。



4. 設橢圓曲線 $\Gamma: \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$ 與直線 $L: x = 12$ ，若 A_0, F 的坐標分別為 $(6, 0)$ 、 $(3, 0)$ ，在曲線 Γ 上另有 11 個點 $A_k, k = 1, 2, 3, \dots, 11$ 使得 $\angle A_0FA_1 = \angle A_1FA_2 = \dots = \angle A_{11}FA_0$ ，令 d_k 為 A_k 到 L 的距離，試求 $\sum_{k=0}^{11} \frac{1}{d_k} =$ _____。
5. 空間中若有一直線 $L: \frac{x-5}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-4}{-2}$ 同時與兩平面 E_1 及 E_2 平行，且到兩平面距離均為 2。若已知原點同時通過 E_1 及 E_2 ，試求兩平面夾角的正弦值_____。
6. 試求所有定義在 $\{x \in \mathbb{R} | x \neq \pm 1\}$ 上的函數 $f(x)$ ，使其滿足 $f(x) + 2f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) = x$ ， $f(x) =$ _____。
7. 有一款手遊不定期推出促銷抽獎活動，其遊戲公司宣稱玩家抽中大獎的機率是 10%。設隨機變數 x 為連續抽獎直到抽中大獎才停止所需的抽獎次數，請以顯著水準 $\alpha = 0.1$ 計算抽獎次數 x 的拒絕域為_____。
8. 若已知 $x - y = 60^\circ$ ， $\cos^2 x + \cos^2 y$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，試求實數數對 $(M, m) =$ _____。
9. 設 a 為實數，若方程式 $x^2 - (3a+1)x - 2a + 2 = 0$ 有虛根 z ，且 z^3 為實數，則 a 值為_____。
10. 給定座標平面上三點 $A(2, 4), B(8, 13), C(1, 1)$ ，若動點 P 滿足 $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = |\vec{CP}|^2$ ，則 $|\vec{2AP} + \vec{BP}|$ 的最小值為_____。
11. 若 \vec{a} 在 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ 上的正射影分別為 $(1, 2, 2), (2, 3, 6), (3, 1, 4)$ ，則 $\vec{a} =$ _____。
12. 給定一多項式函數 $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + 1$ ，則 $\sum_{k=1}^{2026} f\left(\frac{k}{2026}\right) =$ _____。

二、計算證明題，共 28 分

1. 設 α, β 是方程式 $a \cos x + b \sin x - c = 0$ ， $(a^2 + b^2 \neq 0)$ 的相異兩根，且 $\alpha - \beta \neq k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ ，

求證： $\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{c^2}{a^2 + b^2}$ 。(8 分)

2. 試以兩種方法解下列這道題目，並說明你在上課時會傾向於使用哪一種方法向學生說明，為什麼？

題目：已知拋物線的焦點為 $(2, -1)$ ，對稱軸平行 y 軸，且通過點 $(-1, 3)$ ，則此拋物線的方程式為何？(10 分)

3. 設 a, b, c 為實數，已知 b, c 是關於 x 的方程式 $x^2 + (a-2)x + a^2 - a - 2 = 0$ 的兩根，試回答下列問題：

(1) a 值的範圍；(4 分)

(2) $(a+1)^3 + b^3 + c^3$ 的最小值。(6 分)