臺中市立文華高級中等學校115學年度第1次教師甄選
數學科專業知能試題本

測驗說明:

一、本測驗分成二大題：填充題(80分)及計算題(20分)。

二、填充題作答說明：請將正確答案填入正確的題格中，分式須化至最簡，根式須有理化，否則不予計分，全對才給分，不需計算過程。

三、計算題作答說明：請自行標清楚題號再作答，須詳列計算過程或說明理由。

四、另附一張A3計算紙，可供計算或打草稿，請勿用答案卷正反面打草稿。計算紙上方請書寫准考證號碼，並於考試完畢隨試題收回。

一、填充題：(共80分)

Ⅰ.填充一(每格4分，共32分，每格全對才給分。)

1. 從11、12、13、14、15、16、17、19共8個數字中任取3個，則取到的三數其標準差與25、26、28三數的標準差相同的機率為____________。

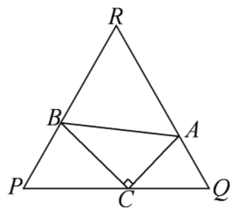
2. 若P為△ABC內部一點(不含邊界)，G為△ABC的重心，且滿足$\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PG}=k\overrightarrow{AB}$，則實數$k$的範圍為____________。

3. 設空間中一點$A(5,5,2)$，直線L過A點且L的一個方向向量為$(4,3,1)$，另有一平面$E:2x+y+3z=7$，B為L與E之交點，點C在E上且滿足$\overline{AB}=\overline{AC}$，試求使$\Delta ABC$面積最大之$C$點坐標為____________。

4. 小強有一堆 1 元、5 元、10 元的硬幣，他發現 1 元硬幣的個數大於等於 5 元硬幣的個數，5 元硬幣的個數大於等於 10 元硬幣的個數，10 元硬幣的個數大於等於 8 個，且「1 元硬幣的個數」加上「5 元硬幣的個數的 3 倍」再扣掉「10 元硬幣的個數」剛好是 60 個。則他手上的硬幣總金額最多為____________。

5. 空間向量 $(-8+4s+2t,3+s-3t,27+5s+t)$ 的長度最小值為____________。

6. 如右圖，ΔPQR 為正三角形，A、B、C 分別落在 $\overline{QR}$、$\overline{PR}$、$\overline{PQ}$ 邊上，且 ΔABC 中，$\angle ACB=90°$。若 $\overline{AQ}=4$，$\overline{CQ}=5$，$\overline{AB}=7$，則 $\overline{PC}=$____________。（圖形僅供參考）



7. 設 $f(x)$、$g(x)$ 皆為實係數多項式，其中 $g(x)$ 是首項係數為正的二次多項式。已知 $(g(x))^2$ 除以 $f(x)$ 的餘式為 $a\cdot g(x)$，其中 a 為正整數。已知 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸無交點，且 $y=g(x)$ 的頂點 y 坐標為9，則所有可能的 a 值之和為____________。

8. 空間中，兩點 $A(1,-2,-1)$、$B(3,1,0)$，一平面 $E：2x-y-2z-1=0$，若 E 上一點 P 使 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$ 有最小值 M 時，P 點的坐標為 (x_0,y_0,z_0)，則 $(M,x_0,y_0,z_0)=$____________。

Ⅱ.填充二(每格 6 分，共 48 分，每格全對才給分)

9. 在xy平面上，點集合$F=\{(x,y)\mid |2x+y|+|x-3y|\le 8\}$所形成的區域面積為____________。

10. 設$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，則$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4\sin^n\theta-5\cos^n\theta}{3\sin^n\theta+7\cos^n\theta}$所有可能的值為____________。

11. 平面上一橢圓Γ:$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$，將$\Gamma$繞原點逆時針旋轉$\theta(0^o<\theta<90^o)$後得到橢圓$\Gamma_1$，其中$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，若$\Gamma_1$與$\Gamma$交四點，則此四點逆時針依序連接成的四邊形面積為____________。

12. 試求$\displaystyle\int_0^1\frac{x^3+2x^2+3x+4}{(x^2+1)(x^2+2x+3)}dx=$____________。

13. 若$a,b\in\Re$且滿足以下兩條件：①$a+b\in Z$；②$\dfrac{a+b}{a^2+ab+b^2}=\dfrac{3}{32}$，則$a+b$最大可能的值為____________。

14. 等腰梯形$ABCD$中，M、N分別為兩腰$\overline{AB}$、$\overline{CD}$中點，若已知對角線$\overline{AC}=7$，且

$\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{MN}=13$，則等腰梯形$ABCD$的面積為____________。

15. 若方程式$x^4+2\sqrt{3}(\log_3 k)x^2+2-(\log_3 k)^2=0$有四個相異實根，則實數$k$的範圍

為____________。

16. 現有一堆數量為n的白色圍棋棋子，重複以下步驟至分成n堆數量為 1 的棋子：

(1) 將數量不是 1 的棋子分成兩堆；

(2) 求剛分成兩堆棋子數量的乘積。

最後求所有乘積的總和為k。

例如：有一堆數量為 4 的棋子，先分成 2, 2 兩堆，得乘積 4；再將其中一堆分成 1, 1 兩堆，得乘積 1；再將最後一堆數量為 2 的分成 1, 1 兩堆，得乘積 1。所有乘積的總和為$4+1+1=6$。

若$k>2026$，則n最小值為____________。

二、計算證明題：(每題 10 分，共 20 分，須詳列計算過程或說明理由。)

1. 求數列$\begin{cases} a_1=1 \\ a_n=2a_{n-1}+n\ \ ,n\ge 2 \end{cases}$的一般項$a_n=$____________。(答案以$n$表示)

2. 若複數α、β、γ滿足$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$，試證明$\dfrac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma}$為實數。