

注意：所有答案請化簡為最簡分數或最簡根式，否則不予計分。

填充題答案寫在答案卷第一頁，計算題從答案卷第二頁開始作答，並標示清楚題號。

一、填充題(每題 5 分，共 80 分)

1. 若矩陣 A 滿足 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ ， $A \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$ ， $A \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$ ，則 $A \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 2 \\ -1 & 8 \end{bmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AB} = 3$ 、 $\overline{AC} = 5$ 且 $\angle BAC = 120^\circ$ 。已知 P 為 \overline{BC} 上一點，且 $\overline{BP} : \overline{PC} = 1 : 100$ ，則 $\tan \angle BAP = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

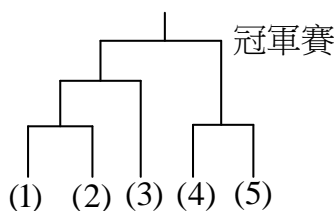
3. 連續投擲一枚不公正硬幣，直到出現正面才停止，令隨機變數 X 的取值為直到出現正面時投擲的總次數，已知 $P(X \geq 5) = \frac{16}{81}$ ，則 X 的期望值與 X 的變異數的和為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 設 x, y 為實數，滿足 $|x+y| + |x-y| = 2$ ，則 $x^2 + y^2 - 4x + y$ 的最大值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 甲、乙、丙、丁 4 人，入座編號 1 號至 12 號的 12 個位子，且任意兩人均不相鄰，且第 6 個位子一定要有人坐，則有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 種入座方法。

6. 已知數列 $\{a_n\}$ 滿足 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + (n-1)a_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$ ，則 $a_{100} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(答案不需要乘開)

7. 熱門手遊舉辦一場 5 位玩家：甲、乙、丙、丁、戊的單淘汰表演賽，賽程如下，圖中(1)~(5)位置由電腦隨機分配。已知甲玩家擁有神裝，在與任何玩家對陣時，勝率皆穩定為 $\frac{2}{3}$ ，其餘四位玩家，戰力相當，彼此對陣時，勝率皆為 $\frac{1}{2}$ 。若系統隨機產生對戰表後，則冠軍賽是由甲、乙兩位玩家對戰的的機率為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



臺北市立景美女子高級中學 115 學年度第 1 次正式教師甄選 數學科 初試題目卷

8. 設 x 為實數，若 α 、 β 為方程式 $a^{-2|x|} + 5x^2 = 1$ 異於 0 的兩根， $a > 0$ 且 $\alpha - \beta = \frac{2}{3}$ ，則 $a =$ _____。

9. 坐標平面上，已知向量 \vec{v} 在向量 $(2, -3)$ 方向的正射影長為 a ，而向量 \vec{v} 在向量 $(3, 2)$ 方向的正射影長為 b 。若 \vec{v} 與向量 $(2, -3)$ 、向量 $(3, 2)$ 的夾角均為銳角，則向量 \vec{v} 在向量 $(4, 7)$ 方向的正射影長為 _____。
(答案請以 a 、 b 表示)

10. 平面上，二定點 A 、 B ，若 $\overline{AB} = 8$ ，則滿足 $\angle APB \geq 120^\circ$ 之動點 P 所圍成之區域面積為 _____。

11. 設 z 為複數，在複數平面上，一個正六邊形依逆時針方向的連續三個頂點為 z 、 0 、 $z - 6 + 4\sqrt{3}i$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ ，則 z 的虛部為 _____。

12. 已知多項式 $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 4x^2$ ，則方程式 $f(f(x)) = 0$ 有 _____ 個相異實根。

13. 已知 $f(x) = \sqrt{4x^2 + (x^2 - 1)^2} + \sqrt{\left(2x - \frac{3}{2}\right)^2 + (x^2 - 5)^2}$ ，其中 x 為實數。若當 $x = m$ 時， $f(x)$ 有最小值 k ，則 $m + k =$ _____。

14. 若空間中有 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} 、 \vec{d} 四個相異向量，滿足 $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ ， $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{d}$ ，且 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$ ，若已知 $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ ，則 $|\vec{b} \times \vec{d}| =$ _____。

15. 若三正數 a, b, c 滿足 $abc(a + b + c) = 25$ ，則 $(a + b)(b + c)$ 的最小值為 _____。

16. 坐標空間中，四個平面 $E_1: x + y + z = 1$ 、 $E_2: x - y - z = 3$ 、 $E_3: x - y + z = -5$ 與 $E_4: ax + by + cz = d$ 恰圍出一個邊長為 $6\sqrt{2}$ 的正四面體，今將 E_4 的所有係數寫成最簡的整數比，且 $ad > 0$ ，則 $ad =$ _____。

二、計算題(共 30 分)

1. 已知 $\langle a_n \rangle$ 為無窮數列，試判斷下列各命題的真偽，需說明詳細理由。

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。 (5 分)

(2) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ，則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂。 (5 分)

2. 分別以 108 課綱 **高一**、**高二**、**高三** 數學的內容解下列題目：

已知 $x^2 + y^2 = 4$ ，其中 x 、 y 為實數，則：

當 $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 時， $3x + y$ 有最大值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

當 $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 時， $3x + y$ 有最小值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(寫出一種方法得 4 分，寫出二種方法得 7 分，寫出三種方法得 10 分)

3. 心心 在數學實驗班專題課微積就是轉機學到了 $(\sin x)' = \cos x$ ，她回家練習時想要依照老師課堂教學的做法來推導餘弦函數的微分，以下是 心心 的做法：

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ，由導函數的定義

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x + h\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos h + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin h - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(\cos h - 1) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \times \frac{\cos h - 1}{h} + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \times \frac{\sin h}{h} \right] \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \times 0 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \times 1 \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \end{aligned}$$

請問 心心 的做法正確嗎？若錯誤的話請指出錯誤的地方，並且 **修正** 她的做法幫她完成練習。 (10 分)