臺北市立永春高級中學 115 學年度第一次正式教師甄選數學科試題

※請於答案卷上作答，計算證明題需寫出過程。

一、填充題（每格 7 分，共 70 分）

1. 若級數$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^n}$是收斂的，則其和為__________。

2. 已知$f(2^x)=6x\cdot log_5 2+3$，求$f(5)+f(25)+f(125)+\cdots+f(5^8)$之值為__________。

3. 設矩陣$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，試求$A^{10}$的所有元之和為__________。

4. 設$x,y\in R$，求$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+(2x-y+1)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(2x-y-5)^2}$的最小值為__________。

5. 定義$[x]$為小於或等於x的最大整數，則$\left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{2^2}{3}\right]+\left[\frac{2^3}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{2^{2026}}{3}\right]$的個位數字為__________。

6. 一個袋子裡有4顆黑球，3顆白球，2顆紅球。今從袋中取出球，一次取一球且取後不放回，試求紅球先被取完的機率為__________。

7. 已知兩複數z_1、z_2滿足$|z_1-(6+8i)|=3$、$|(1+i)z_2-2i|=\sqrt{2}$，求$|z_1-z_2|$的最小值為__________。

8. 已知$ABCD$為圓內接四邊形，其邊長分別為$\overline{AB}=3$、$\overline{BC}=2$、$\overline{CD}=2$、$\overline{DA}=6$，若向量$\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AD}$，試求數對$(\alpha,\beta)$為__________。

9. 有一方程式$x^4-8x^3+14x^2+kx+m=0$，其四根成等差，若公差$d>0$，試求序對(d,k,m)為__________。

10. 有10位選手進行單循環賽，每兩人恰比賽一場，無和局。比賽結束後，發現不存在三位選手甲、乙、丙使得甲贏乙、乙贏丙、丙贏甲。試求所有選手獲勝場數的平方和為__________。

二、計算證明題（每題 10 分，共 30 分）

1. 設$f(x)$為實係數多項式，滿足$f(0)=0$且$f(x^2+1)=(f(x))^2+1$，求所有符合條件的$f(x)$。

2. 已知ΔABC的內切圓切三邊於D、E、F，且ΔABC的外接圓、內切圓之半徑分別為R、r。若ΔABC的面積為S，ΔDEF的面積為T，證明$\frac{T}{S}=\frac{r}{2R}$。

3. 若有兩曲線$\Gamma_1: y=e^{-x}$及$\Gamma_2: y=-e^{x+1}$，試求：
   (1) 兩曲線的公切線L的方程式。
   (2) 直線L與Γ_1、Γ_2的切點坐標。

臺北市立永春高級中學 115 學年度第一次正式教師甄選數學科參考答案

填充題

1. $\frac{3}{2}$
2. 240
3. 68
4. $\sqrt{46}$
5. 9
6. $\frac{22}{45}$
7. $\sqrt{74}-4$
8. $(\frac{22}{27},\frac{11}{27})$
9. $(2,8,-15)$
10. 285

計算證明題

1. $f(x)=x$
2. 略
3. (1) $y-e^{\frac{3}{2}}=-e^{\frac{3}{2}}\left(x+\frac{3}{2}\right)$

   (2) $(-\frac{3}{2},e^{\frac{3}{2}})$、$(\frac{1}{2},-e^{\frac{3}{2}})$