

國立台中一中 99 學年度第 1 學期 期末考試 高二自然組 數學科試題

《答案請依題號填入 P.3 答案卷，記得寫上班級、座號、姓名並且繳回》

一、單選題：每題 5 分，共 25 分。

- 坐標平面上，下列直線何者與圓 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ 相切？
(A) $3x+4y=0$ (B) $3x+4y=5$ (C) $4x+3y=0$ (D) $4x+3y=5$ (E) $4x+3y=10$
- 設直線 L 過點 $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ ，若圓 $x^2 + y^2 = 4$ 上恰有三點到直線 L 的距離等於 1，則 L 有幾條？
(A) 1 條 (B) 2 條 (C) 3 條 (D) 4 條 (E) 無窮多條
- 試問坐標空間中共有幾個平面，會使得點 $O(0, 0, 0)$ 到此平面之距離為 1，且點 $A(3, 0, 0)$ 到此平面之距離為 2
(A) 1 個 (B) 2 個 (C) 3 個 (D) 4 個 (E) 無窮多個
- 試問坐標空間中三平面 $E_1: 2x+y-z=5$, $E_2: x+2y+z=7$, $E_3: 7x+8y+z=31$ 將球體 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1000$ 分割為幾塊？(A) 4 塊 (B) 5 塊 (C) 6 塊 (D) 7 塊 (E) 8 塊
- 坐標空間中 O 為原點，點 A 的坐標為 $(1, 2, 1)$ 。設 S 是以 O 為球心、4 為半徑的球面，且在 S 上滿足內積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = 6$ 的所有點 P 所成的圖形為何？
(A) 空集合 (B) 一個點 (C) 兩個點 (D) 一個圓 (E) 兩個圓

二、多選題：每題 10 分，共 30 分。(每題至少有一選項正確，全對給 10 分，錯一個給 7 分，錯二個給 4 分。)

- 一球面的球心與一正四面體的中心重合，考慮球面與正四面體所有邊的交點，則交點個數可能是：
(A) 0 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 12
- 設地球為一球體，球的半徑為 R ，球面上二地 A, B 的位置為 A 位於東經 30° 北緯 60° ， B 位於東經 120° 北緯 60° ，今以 $d(A, B)$ 表示 A, B 兩點的球面距離，則下列何者正確？
(A) 若 O 為球心，則 $\angle AOB < 90^\circ$
(B) $d(A, B) < R$
(C) 若 C 在球面上且 C 位於東經 75° 北緯 60° ，則 $d(C, A) = d(C, B)$
(D) 若 C 在 A, B 二地之間最短路徑的中點，則 C 位於東經 75° 北緯 60°
(E) 若有一人從 A 沿著北緯 60° 線，向東移動到 B ，接著向南移動相同的距離，再向西移動相同距離，再向北移動相同距離，則此人回到 A 點
- 設空間中不共線相異四個點 A, B, C, D ，若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} > 0$ ，則下列何者正確？
(A) $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ 三線段形成銳角三角形
(B) 過 A, B, C 三點恰有一個圓
(C) $\overline{AC}$ 為包含 A, B, C 三點的最小球面之直徑
(D) 過 A, B, C, D 四點恰有一個球面
(E) 若 $\angle CBA + \angle CDA = 180^\circ$ ，則 A, B, C, D 四點共圓

三、填充題：每格 5 分，共 45 分。

1. 已知 $\begin{vmatrix} 5\alpha - 7\beta & 4\alpha + 3\beta \\ 5\gamma - 7\delta & 4\gamma + 3\delta \end{vmatrix} = 86$ ，求 $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 設 $a \in \mathbb{R}$ ，若方程組 $\begin{cases} 2x - (a-3)y = 0 \\ (3-a)x + 2y = 0 \end{cases}$ 有異於 $(0, 0)$ 的解，且方程組 $\begin{cases} 2x - (a-3)y = a+5 \\ (3-a)x + 2y = 7-a \end{cases}$ 無解，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 設 $a_1, a_2, \dots, a_{2010}$ 是從 $-1, 0, 1$ 這三個整數中取值的數列，若 $a_1 + a_2 + \dots + a_{2010} = 612$ 且 $(a_1 + 1)^2 + (a_2 + 1)^2 + \dots + (a_{2010} + 1)^2 = 4444$ ，則 $a_1, a_2, \dots, a_{2010}$ 當中有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 項是 1。

4. 設方程式 $\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 2\sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2}$ 表一圓，求圓心的坐標為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

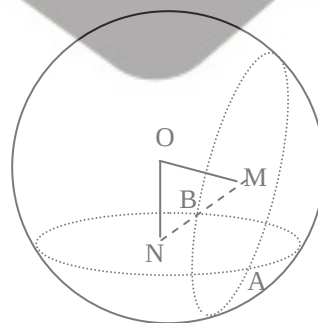
5. 若一圓過三點 $A(4, 0)$ 、 $B(0, 6)$ 、 $C(12, 0)$ ，則該圓的半徑 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 若直線 $y = x + k$ 與曲線 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 有兩個不同的交點，則 k 的範圍為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

7. 已知點 $P(0, 5)$ 及圓 $C: x^2 + y^2 + 4x - 12y + 24 = 0$ ，若直線 L 過 P 點且被圓 C 所截得線段長為 $4\sqrt{3}$ ，求 L 方程式 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(兩解)

8. 過點 $A(4, -1, 0)$ 與平面 $2x - y + z = -2$ 切於點 $B(1, 2, -2)$ 的球面方程式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

9. 如圖，球面 S 的半徑為 4， O 為球心，圓 M 與圓 N 為該球面的兩個小圓， $\overline{AB}$ 為圓 M 與圓 N 的公共弦， $\overline{AB} = 4$ ，若 $\overline{OM} = \overline{ON} = 3$ ，則兩圓圓心的距離 $\overline{MN} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



國立台中一中 99 學年度第 1 學期 期末考試 高二自然組 數學科答案卷

高二_____班_____號 姓名_____

一、單選題：每題 5 分，共 25 分。

1	2	3	4	5

二、多選題：每題 10 分，共 30 分。(每題至少有一選項正確，全對給 10 分，錯一個給 7 分，錯二個給 4 分。)

1	2	3

三、填充題：每格 5 分，共 45 分。

1.	2.	3.
4.	5.	6.
7.	8.	9.