

國立臺中一中 98(下) 第一次期中考 高二(自)數學科試題

命題：莊天旭、陳光鴻 審題：鄭建惠 班級：_____ 姓名：_____ 座號：_____ 得分：_____

一、多重選擇題(每題 8 分，共 24 分。答錯一個選項得 4 分，答錯兩個以上選項不給分。)

() 1. 下列關於圓錐曲線的敘述，何者正確？

- (A) 當焦點與準線距離愈短，則拋物線的開口愈窄。
- (B) 長軸是指橢圓內最長的弦。
- (C) 雙曲線為兩條拋物線所組成。
- (D) 共軛雙曲線是指共用同一漸近線的兩雙曲線。
- (E) 等軸雙曲線的兩漸近線必互相垂直。

() 2. 令 $P(z)$ 表示複數平面上的一點，其中複數 z 滿足下列各條件：

甲： $|z-3i|=4$ 乙： $|z-3i|-|z+4|=0$ 丙： $|z-3i|-|z+4|=10$

丁： $|z-3i|=\left|\frac{z-\bar{z}}{2}\right|$ 戊： $|z-3i|+|z+4|=5$

則關於 P 點軌跡圖形的敘述，何者正確？

- (A) 甲條件的軌跡圖形為「圓」。
- (B) 乙條件的軌跡圖形為「直線」。
- (C) 丙條件的軌跡圖形為「雙曲線的一支」。
- (D) 丁條件的軌跡圖形為「拋物線」。
- (E) 戊條件的軌跡圖形為「橢圓」。

() 3. 以 $(1,1)$ 為頂點， $(3,2)$ 為焦點之拋物線 Γ ，下列關於 Γ 之敘述何者正確？

- (A) 正焦弦長為 $4\sqrt{5}$
- (B) $(0,5)$ 為正焦弦之一端點
- (C) $(5,-2)$ 為正焦弦之另一端點
- (D) 準線為 $2x+y+2=0$
- (E) 與 x 軸交於一點

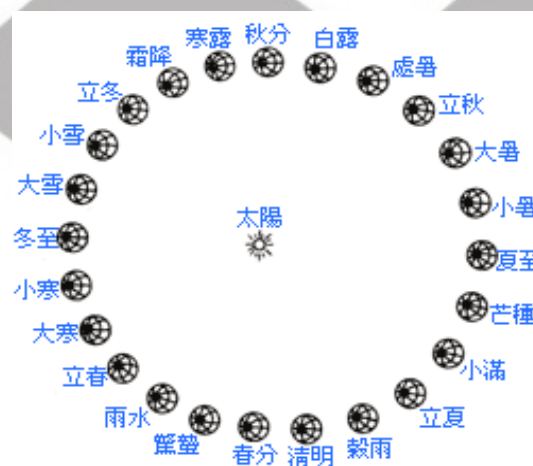
二、填充題(每格 6 分，共 60 分。)

1. 以 $(-1,0)$ 為焦點，準線平行 y 軸，正焦弦長為 8 的拋物線方程式為_____。(二解)

2. 求橢圓 $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{5} = 1$ 的焦點座標為_____。(二解)

3. 以 $2x+3y=1$ 與 $2x-3y=-4$ 為漸近線，且過點 $(1,1)$ 的雙曲線，其共軛雙曲線方程式為_____。

4. 由農民曆中的資料顯示(如下圖)，春分、夏至、秋分、冬至恰好將一年的時間分成四等分。在眾多科學家的努力之下，我們已經知地球繞太陽轉的軌道為一橢圓型軌道，而且太陽恰好在此橢圓型軌道的一個焦點上。夏至時，地球距離太陽為 152,100,000 公里，而冬至時，地球距離太陽為 147,100,000 公里。試問：春分時，地球距離太陽_____公里。



5. 已知拋物線 Γ 的焦點 $F(1,1)$ 、準線 $L: x+y+2=0$ 。
今平面上一定點 $A(1,3)$ ，動點 P 在 Γ 上，求 $\overline{PA} + \overline{PF}$ 的最小值為_____。

6. 在一長軸長 40 公尺，短軸長 20 公尺之橢圓形軌道上，發訊器放置在短軸端點不動，軌道車在軌道上任意移動。求發訊器與軌道車的最大距離為_____

7. 令 O 表原點，橢圓 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上異於頂點的 P 、 Q 兩點，滿足 $\overline{OP} \perp \overline{OQ}$ ，求 O 到 $\overline{PQ}$ 的距離為_____

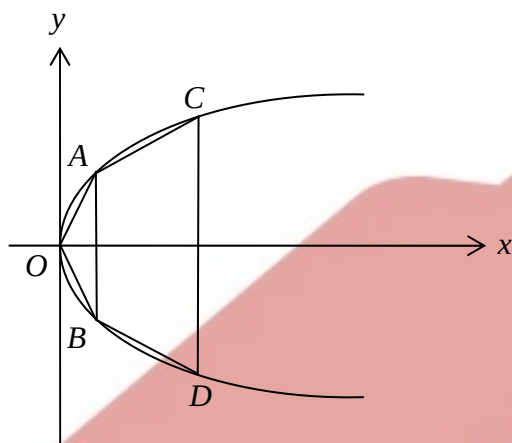
8. 令橢圓 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的內接矩形面積最大值為 M ，內接矩形周長最大值為 N ，求數對 (M, N) 為_____

9. 一雙曲線與一橢圓 $\Gamma: \frac{(x-3)^2}{t-10} + \frac{y^2}{t+15} = 1$ 共焦點，且正焦弦長為 $\frac{9}{2}$ ，求此雙曲線方程式為_____。

10. 求雙曲線 $\left| \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} - \sqrt{(x+3)^2 + (y+4)^2} \right| = 8$ 的漸近線方程為_____ (二解)

三、計算題(每題 8 分，共 16 分。)

1. 如下圖，拋物線 $\Gamma: y^2 = 4x$ ， O 為 Γ 的頂點， $\overline{AB}$ 為 Γ 的正焦弦。已知 Γ 的另一弦 $\overline{CD}$ 與 $\overline{AB}$ 平行，且梯形 $ABDC$ 的面積為 ΔOAB 的 36 倍，求 C 點座標為何？



2. 已知圓 $C_1: x^2 + y^2 = 1$ 、圓 $C_2: x^2 + (y-6)^2 = 9$ ，今有一動圓 C 與此兩圓一內切一外切，求圓 C 之圓心的軌跡方程式為何？

四、加分題(10 分)

1. 空間中一球面 $S: x^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 2$ ，

由點 $A(0, 4, 4)$ 置一光源照射球面。

求球面 S 在 xy 平面上的影子輪廓的方程式。