准考證號：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

臺北市立大安高級工業職業學校 115 學年度第 1 次教師甄選

數學 科筆試試題

科目名稱：高中職數學專業知能

配分比例：100%

考試時間：18:30~20:00

作答說明：1. 請在彌封之答案卷上標明題號依序作答，答案卷上不得書寫姓名或作任何記號，否則不予計分。
2. 全卷限用藍色或黑色單一顏色筆作答。
3. 作答時不可使用計算機。
4. 交卷時請將試題卷與答案卷一併繳交。
5. 請於所發放的答案卷內完成作答，不加發答案卷。

一、 填充題(每題 3 分)

1. 若 $[x]$表示小於或等於實數 x 的最大整數值，則 $\sum_{k=1}^{125}\left[\sqrt[3]{k}\right]=$？

2. 坐標平面上，x坐標與 y 坐標均為整數的點稱為格子點。令 n 為正整數，T_n 為平面上以直線 $y=\dfrac{-1}{n}x+n$，以及 x 軸、y 軸所圍成的三角形區域(包含邊界)，而 a_n 為 T_n 上的格子點數目，則 $a_n=$？(以 n 表示)

3. 在人工智慧的分類技術中，用到以曲線來分類不同物件的概念。設平面上有七個點 $A(-1,1)$、$B(-3,1)$、$C(2,3)$、$D(-1,2)$、$E(1,0)$、$F(1,-3)$、$G(3,5)$分屬●、▲兩類。已知其中●類包含點 A,C,E,G，而▲類包含點 B,D,F。若欲使用曲線 Γ：$y^2=x^3+tx^2+1$將這七個點「正確分類」(即某一類的所有點皆滿足 $y^2<x^3+tx^2+1$，另一類的所有點皆滿足 $y^2>x^3+tx^2+1$)，則實數 t 的範圍為何？

4. 設銳角三角形 ABC 的外接圓半徑為 8，已知外接圓圓心到 $\overline{AB}$ 的距離為 2，而到 $\overline{BC}$ 的距離為 7，則內切圓半徑為？

5. 已知 x,y,z 為實數，$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1\\ x^2+y^2+z^2=\dfrac{3}{2}\\ x^3+y^3+z^3=1\end{cases}$，$x+y+z$ 為整數，求 $x+y+z$ 的值？

6. 坐標空間中，考慮一個正四面體，其所有頂點的 z 坐標皆滿足 $0\le z\le 6$。已知此正四面體至少有一個頂點在平面 $z=0$ 上，且至少有一個頂點在平面 $z=6$ 上，求此正四面體邊長的最大可能值？

7. 大安高工舉辦音樂會，包含鋼琴表演 2 個、小提琴表演 2 個、歌唱表演 2 個，共 6 個不同的曲目。為了避免節目過於單調規定同類型的表演不能排在一起(2 個鋼琴不能相鄰、2 個小提琴不能相鄰、2 個歌唱也不能相鄰)，試問這場音樂會可能的曲目排列方式共有幾種？

8. 已知 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$皆為實係數三次多項式，且除以 x^2-x+2 的餘式分別為 $2x+1$、$x-1$、$x+2$。若 $x\cdot f(x)+a\cdot[g(x)]^2+b\cdot h(x)$可以被 x^2-x+2 整除，其中 a,b 為實數，則數對 $(a,b)=$？

准考證號：________________

9. 設 z 為複數，在複數平面上，一個正八邊形依逆時針方向的連續三個頂點為 z、0、$z-1-\sqrt{2}-i$(其中 $i=\sqrt{-1}$)，則 z 的實部為？

10. 坐標平面上，在以 $O(0,0), A(0,2), B(2,2), C(2,0)$ 為頂點的正方形(含邊界)內，令 R 為滿足下述條件的點 $P(x,y)$ 所成區域，與點 $P(x,y)$ 的距離為 $|x-y|$ 之所有點所成圖形完全落在正方形 $OABC$(含邊界)內。則區域 R 的面積為？

11. 在平面坐標上，Γ 是以 x 軸和 $L:3x-4y=0$ 為兩漸近線的雙曲線圖形，今利用旋轉矩陣 A 將 Γ 圖形經過線性幾何變換後，會讓新雙曲線圖形的貫軸會落在坐標軸上，試寫出所有符合敘述的矩陣 A？

12. 已知 ΔABC 中，$\angle A=90^\circ$，三角形內部一點 P，符合 $\dfrac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|}+\dfrac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|}+\dfrac{\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PC}|}=\overrightarrow{0}$，且 $|\overrightarrow{PB}|=132$、$|\overrightarrow{PC}|=14$，試求 $|\overrightarrow{PA}|=$？

13. 已知 $z=\cos\frac{2}{7}\pi+i\sin\frac{2}{7}\pi$，試問 $z+z^2+z^4$ 的值為何？

14. 在 ΔABC 中，已知 $\tan A, \tan B, \tan C$ 皆為正整數，試問 $\tan A+\tan B+\tan C$ 的值為何？

15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\dfrac{\sin^3 x}{\sin^3 x+\cos^3 x})dx=$？

16. 實數 a,b,c,d 滿足 $\begin{cases} a^2+b^2=9 \\ c^2+d^2=16 \\ bc-ad=12 \end{cases}$，求 bd 的最大值？

17. 若多項式 $(1+x+x^2+x^3)^{10}$ 的展開式為 $1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{30}x^{30}$，試求 $a_6=$？

18. 今包含甲共 k 個人在練習傳球，並可自由地傳給另外一個人，倘若彼此一共傳球 n 次。球首先從甲手中傳出，若第 n 次最後傳回甲的手上，共有幾種不同的傳球方法？

19. 已知正四面體 ABCD 中，E 點落在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AE}=\frac{1}{4}\overline{AB}$；F 點落在 $\overline{CD}$ 上，且 $\overline{CF}=\frac{1}{4}\overline{CD}$，若 $\overrightarrow{DE}$ 與 $\overrightarrow{BF}$ 的夾角為 θ，試求 $\sin\theta=$？

20. 求 $a\neq 0$ 且滿足 $\lim_{x\to\infty}(\dfrac{4x+a}{4x-a})^{3x+1}=3$，$a=$？

准考證號：________________

二、簡答題(每題 10 分)

1. 坐標平面上，以Γ表示多項式函數 $y=x^3-6x^2+10x$ 的圖形，且以 L 表示直線 $y=mx$，其中 m 為實數。根據上述，試回答下列問題。
   (1)當 $m=2$ 時，試求出在 $x\geq 0$ 的範圍內，Γ與 L 的三個相異交點的 x 坐標。(2 分)
   (2)承(1)，試求Γ與 L 所圍有界區域面積的值。(4 分)
   (3)在 $x\geq 0$ 的範圍內，若Γ與 L 有三個相異交點，則滿足此條件的 m 之最大範圍為 $a<m<b$，試求 a、b 之值。(4 分)

2. 設 $f(x)$ 為實係數多項式函數，且 $xf(x)=3x^4-2x^3+2x^2+\int_1^x f(t)dt$ 對 $x\geq 1$ 恆成立。試回答下列問題。
   (1)試求 $f(1)$。(2 分)
   (2)試求 $f(x)$。(4 分)
   (3)試證明恰有一個大於 1 的正實數 a 滿足 $\int_0^a f(x)dx=1$。(4 分)

3. 學生在學習極限時，常發生以下作答算式：

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2})=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2})$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2})+\lim_{n\to\infty}(\frac{2}{n^2})+\lim_{n\to\infty}(\frac{3}{n^2})+\cdots+\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n^2})=0+0+0+\cdots+0=0$$

   請問：
   (1)這算式問題核心出自於哪裡？(3 分)
   (2)如何以學生所學數學知識作出正確解釋？(3 分)
   (3)於是在作極限的教學時，應該要注意什麼？(4 分)

4. 以下為本校曾經出過的段考題目，請舉出其中不妥的地方(各 3 分)，並請試著依原出題老師的本意重新調整再出適切的評量題目(各 2 分)。
   (1)設 $f(x)$ 為多項式，若 $3f(x^2)+x\cdot f(x)=3x^3+4x^2-x+6$，試求 $f(x)$ 的所有係數和？
   (2)若方程式 $x^2+4x+6=0$ 之兩根為 α,β，則 $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=$？