臺北市立中山女子高級中學 115 學年度第 1 次教師甄選

數學科試題

作答說明：每題皆為計算題，請寫出計算過程，並將最後答案填入答案格裡。第 14 ~17 題直接說明即可。作答時間 120 分鐘，滿分 120 分。

1. 假設有一個不公正的硬幣，擲出正面的機率為 $\frac{3}{4}$，則擲出 30 次，硬幣出現偶數次正面的機率為 $a+\frac{1}{2^n}$，其中 n 為正整數，試求此時 $(a,n)=$ __________ 。(5 分)

2. 若用 3 種不同顏色塗一個 n 邊形的 n 個邊，每邊塗一色，且相鄰兩邊必異色，令 a_n 表所有塗色方法，則 $a_3=3\times2\times1=6$，試求 $<a_n>$ 的遞迴關係式並詳述產出過程？答：__________________。(5 分)

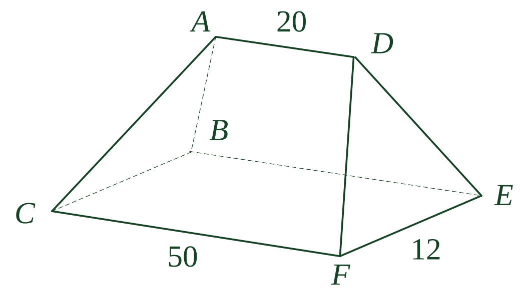
3. 若複數 z 滿足 $|z|=2$，則 $\dfrac{|z^2-z+1|}{|2z-1-\sqrt{3}i|}$ 的最大值為________。(8 分)

4. 若 P 為 ΔABC 內部一點，且 $2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，$\overline{BC}=2$，則 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ 內積的最大值為________。(8 分)

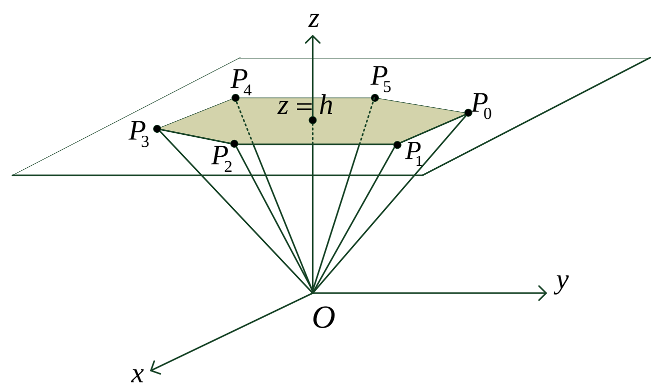
5. 坐標平面上，將一個過原點且半徑為 r 的圓完全放入 $y\geq x^4$ 的區域內，則 r 的最大值是__________。(8 分)

6. 求極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{4-\left(\dfrac{\sqrt{3}\,k-\ln(1+\frac{1}{n})^n}{n}\right)^2}$ 之值為________。(8 分)

7. 有一積木（示意圖如右圖結構），其中 $ACFD$ 和 $ABED$ 是兩個全等的等腰梯形，$BCFE$ 是一個矩形。頂端稜邊 $\overline{AD}$ 與底部平面 $BCFE$ 平行。已知各邊長度數據如下：頂端稜邊長 $\overline{AD}=20$ ，底部矩形長 $\overline{CF}=50$ ，底部矩形寬 $\overline{EF}=12$ ，頂端 $\overline{AD}$ 到底部平面 $BCFE$ 的垂直高度為 10（即頂點 D 在底面的投影點 P ， $\overline{DP}=10$ ）。
試求：此積木的體積為_________。(8 分)



8. 坐標空間中，$O(0,0,0)$ 為原點，平面 $z=h$ （其中 $0\le h\le 1$ ）上有一以 $(0,0,h)$ 為圓心的圓，在此圓上依順時鐘順序取 6 點構成正六邊形 $P_0P_1P_2P_3P_4P_5$，使得各線段 $\overrightarrow{OP_j}$ $(0\le j\le 5)$ 的長度都是 1，請參見示意圖。在 $\overrightarrow{OP_0}$ 和 $\overrightarrow{OP_3}$ 夾角不超過 $90°$ 的條件下，若 $V(h)$ 是以 O 為頂點，正六邊形 $P_0P_1P_2P_3P_4P_5$ 為底的正六角錐體積，試問正六角錐體積 $V(h)$ 的最大值為_________。 (8 分)



9. 若 a 、 b 、 c 三個正實數的總和為 12，求 $\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+4}+\sqrt{c^2+16}$ 的最小值為__________。(8 分)

10. 已知 P 為橢圓 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$ 上一個動點，設 F 為橢圓在 x 軸上方的焦點， $A(7,-3)$ 為一個定點，則滿足 $\overline{PA}+\overline{PF}$ 為整數值的 P 點共有________個。(8 分)

11. 若正 ΔABC 的三頂點 A、B、C 分別在半徑為 $\sqrt{3}$、2、$\sqrt{7}$ 的同心圓上，且此同心圓圓心在正 ΔABC 內部，則此正 ΔABC 的面積為_________。(8 分)

12. 設一袋中有紅、黃、藍色的球各一顆，若每次從袋中取出一球(每球被取出的機會均等)，紀錄顏色後放回，然後再取一球…
(1) 若連續兩次取出紅球即停止取球，則取球次數的期望值為何？答：________。(5 分)
(2) 若連續兩次取出相同顏色的球即停止取球，則取球次數的期望值為何？答：________。(5 分)
【作題說明：若欲使用公式解題，請先證出公式，否則不予計分。】

13. 一正立方體有 6 個表面，每個表面有 2 條對角線，故一正立方體共有 12 條「表面對角線」。

現將一正立方體置於空間坐標系中，已知其中 2 條「表面對角線」分別位在兩直線 $L_1:\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{5}$ 與 $L_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{5}=\dfrac{z-5}{-4}$ 上，試求此正立方體的體積為___________。(8 分)

14. 在高中課程有關球面的單元中，解題時常會用到下面性質：

「在球面上，連接相異兩點的最短路徑必為大圓的圓弧線段」

請問你如何向學生說明此性質是正確的，試「簡述」之。(5 分)

15. 此題為 108 指考試題，也是學生常感到困惑的一道題目，請問身為教師的你會採取何種策略引導學生解題？(5 分)

坐標平面上以原點 O 為圓心的單位圓上三相異點 A、B、C 滿足 $2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，其中 A 點的坐標為 $(1,0)$。試選出正確的選項。

(1)向量 $2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$ 的長度為 4

(2)內積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}<0$

(3) $\angle BOC$ 、 $\angle AOC$ 、 $\angle AOB$ 中，以 $\angle BOC$ 的度數為最小

(4) $\overline{AB}>\dfrac{3}{2}$

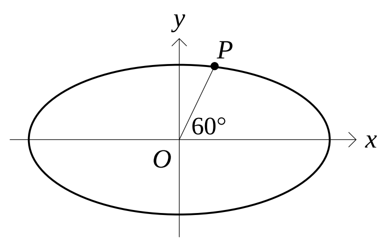
(5) $3\sin\angle AOB=4\sin\angle AOC$

16. 有一道題目如下：

在坐標平面上有一橢圓，它的長軸落在 x 軸上，短軸落在 y 軸上，長軸、短軸的長度分別為 4、2，如圖所示。

通過橢圓的中心 O 且與 x 軸夾角為 60 度的直線在第一象限跟橢圓交於 P，

試求此交點 P 與橢圓中心 O 的距離？



學生作法如下：

點 P 在橢圓上，橢圓的 $a=2,b=1$

得知 P 坐標為 $(2\cos 60^\circ,\sin 60^\circ)=(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，得 $\overline{OP}=\sqrt{1^2+(\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2}=\sqrt{\dfrac{7}{4}}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

請問該生此作法，有何舊經驗，舊知識的干擾？如何協助他，學習正確的新知識，並引導解題。(5 分)

17. 有一道題目：「若方程式 $x^2+(m-2)x+(5-m)=0$ 的兩根皆大於 2，求實數 m 的範圍。」

某生的做法如下：

解：設該方程式兩根為 α 、 β

則由 $\begin{cases}\alpha>2\\ \beta>2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta>4\\ \alpha\beta>4\end{cases}$，再由根與係數關係得知 $\begin{cases}-(m-2)>4\\ 5-m>4\end{cases}$，所以 $m<-2$ ……①

又方程式有實根，判別式 $\Delta=(m-2)^2-4(5-m)=m^2-16\ge 0$

即 $m\le -4$ 或 $m\ge 4$……②，由①②得到答案為 $m\le -4$

試問學生的做法正確與否？如果正確，你是否有其他作法提供他參考？

若有錯誤，請問要如何指出錯誤，並教導學生正確解法？(5 分)