臺北市立大同高級中學 115 學年度第 1 次教師甄選初選【高中數學科】試題卷

一、填充題(每題 6 分)

1. 給定一個整係數三次多項式函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，已知 $f(0)=0$，$f(2)=2$，$420\le f(6)\le 460$，則 $f(1)=$【　　　　　】

Ans: -12

2. 坐標平面上橢圓 Γ，長軸在 x 軸，短軸在 y 軸，對原點逆時針旋轉 θ 角後得新橢圓 $\Gamma':29x^2-24xy+36y^2=180$，$(\frac{12}{5},\frac{9}{5})$ 為新橢圓長軸頂點之一，若橢圓 Γ 上點 P 經此旋轉後的新點 P' 落在正向 y 軸上，點 P 坐標為【　　　　　】

Ans: $(\frac{3\sqrt{5}}{5},\frac{4\sqrt{5}}{5})$

3. 有一枚不均勻硬幣，正面機率為 $\frac{2}{3}$，反面機率為 $\frac{1}{3}$，若擲 100 次這枚不均勻硬幣，正面次數為偶數的機率為 $\frac{1+b^{100}}{a}$，數對 (a,b) 為【　　　　　】

Ans: $(2,\frac{1}{3})$ 　或（2x3^{100}, 3）

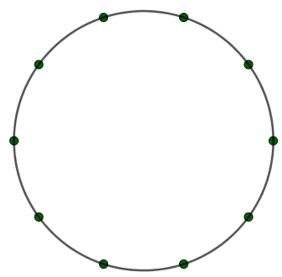
4. 在複數平面上，複數 z 在第一象限，$|z|=5$ 且 $\left|\frac{-7}{5}+\frac{24}{5}i-z^3\right|=\left|\frac{-7}{5}+\frac{24}{5}i-z\right|$，則複數 $z=$【　　　　　】

Ans: $3+4i$

5. p 為正整數，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=$【　　　　　】

Ans: $\frac{1}{p+1}$

6. 圓周上 10 等分點，任意選取 4 個等分點圍成四邊形，每一點被選取機會均等，則所圍四邊形至少有一個角是直角的機率為【　　　　　】



Ans: $\frac{1}{3}$

7. $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，則 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{[\sqrt{n}]}}=$【　　　　　】

Ans:5

8. 平面上一點 P 到正 ΔABC 各頂點距離分別是 3、5、7，此正 ΔABC 面積為【　　　　　】

Ans: $\frac{19}{4}\sqrt{3}$ 或 $16\sqrt{3}$

二、計算題(52 分)

1. 高中數學題目：

(1)袋中有紅球 3 顆、白球 2 顆，每球被抽到的機會均等。從袋中抽出 2 顆球，令隨機變數 X 為抽出紅球顆數，求隨機變數 X 的期望值。

(2)袋中有紅球 3 顆、白球 2 顆，每球被抽到的機會均等。每次從袋中抽出 1 顆球，取後不放回，抽 2 次，令隨機變數 X 為抽出紅球顆數，求隨機變數 X 的期望值。

學生作法:

(1)每球被抽到的機會均等，期望值等於平均數，抽 1 顆球紅球的期望值為$\frac{3}{5}$，$\therefore X$ 的期望值為$\frac{3}{5}\cdot 2=\frac{6}{5}$

(2)每次抽出紅球機率均為$\frac{3}{5}$，X 為 $n=2$，$p=\frac{3}{5}$的二項分布，$\therefore X$ 的期望值為 $np=2\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{5}$

學生作法是否正確?如果正確，回答正確即可，如果有誤，寫出學生的錯處及正解。

略

2. 將地球儀設定成一個坐標空間，球心為原點 O，地球儀上 A，B 兩個城市的坐標 $A(5,0,0)$，$B(3,4,0)$，求地球儀上點 C 使得三城市 A、B、C 任兩點在球面上的最短距離皆相等。

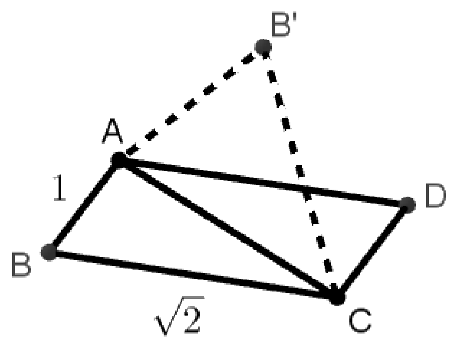
$C(x,y,z)=(3,\frac{3}{2},\pm\frac{\sqrt{55}}{2})$

3. 設$[x]$表示不大於 x 的最大整數，滿足$[x^3]=4x+3$ 的實數 x 為【　　　　　　　　】

Ans: $x=-\frac{5}{4}$ 或 -1

4. 長方形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=1$、$\overline{BC}=\sqrt{2}$，沿著對角線$\overline{AC}$摺起後，B 移動到 B'，如下圖 $(\overline{AB}=\overline{AB'},\overline{CB}=\overline{CB'})$。若 $\overline{B'B}>\overline{B'D}$ 且平面 $AB'C$ 與平面 ADC 夾 $60°$ 角，則$\overline{B'D}$的長度為何？

答：1



5. 已知圓 O 為圓形鏡面，光線從圓周上一點 A 射向圓內一點 P，經過 B、C 兩次反射後正好再次通過 P 點 (如圖所示)，若$\overline{OP}$長為圓 O 半徑長的一半，則 $\sin\angle AOP$ 的值為何？

答案：$\sqrt{2\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)$