

國立嘉科實驗高級中學

115學年度高中部教師甄選

數學科 試題

作答注意事項

1. 本試題共兩部分：測驗題及非選擇題，共計 100 分。
2. 選擇題請用 2B 軟心鉛筆在答案卡劃記，非選擇題限用藍色、黑色原子筆或鋼筆在答案本上作答，但繪圖時得使用黑色鉛筆。
3. 本科不可以使用電子計算器。

武豐公告用

一、填充題（每題 7 分，共 56 分）

1. 計算無窮級數

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 + 2 \times 3} + \frac{1}{1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + n(n+1)} + \cdots$$

之值為 _____。 $\frac{3}{4}$

2. 設 $A = 69^6 + 6 \times 69^5 + 15 \times 69^4 + 20 \times 69^3 + 15 \times 69^2 + 6 \times 69 + 1$ ，則 A 之正整數因數共有 _____ 個。 343

3. 設 a, b 為正實數，且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ ，如果 $2025a^2 = 2026b^2$ ，則

$$\sqrt{2025a + 2026b} = \text{_____} \circ \sqrt{2025} + \sqrt{2026}$$

4. 已知實數 a, b, c 滿足下列條件：

$$\begin{cases} \frac{a}{2^2+3^2} + \frac{b}{2^2+5^2} + \frac{c}{2^2+7^2} = 1 \\ \frac{a}{4^2+3^2} + \frac{b}{4^2+5^2} + \frac{c}{4^2+7^2} = 1 \\ \frac{a}{6^2+3^2} + \frac{b}{6^2+5^2} + \frac{c}{6^2+7^2} = 1 \end{cases}$$

則 $a + b + c$ 之值為 _____。 139

5. 在一個盒子中裝有 2026 張卡片，卡片上的編號依次為 $1, 2, 3, \dots, 2025, 2026$ ，現在每次抽取一張卡片，每張卡片被抽取的機會均等，抽取後就不再放回，共抽取 k 次卡片。設隨機變數 X 為這 k 次抽取的卡片的最大編號，則使得 $E(X) \geq 2000$ 的最小的 k 的值为 _____。 75

6. 設 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$ ，其中 a, b, c 均為實數。已知 $f(x) = 0$ 的所有根在複數平面的單位圓內或圓上，則 $a^2 + c^2 - 8b$ 的最大值为 _____。 16

7. 投擲一個公正骰子四次，試求投出的四個數的乘積為完全平方數的機率。

$$\frac{25}{162}$$

8. 已在坐標平面上，滿足以下不等式

$$|3x + 2y - 2| + |3x - 2y + 5| + |3x + 2y + 2| + |3x - 2y - 5| \leq 14$$

的點 (x, y) 所成的圖形面積為 _____。 $\frac{10}{3}$

二、計算證明題（每題 10 分，共 20 分）

1. $\triangle ABC$ 中， $\overline{BC} = \overline{CA} + \frac{1}{2}\overline{AB}$ ，若 P 點在 \overline{AB} 上使得 $\overline{PA} = 3\overline{BP}$ ，

試證： $\angle CAP = 2\angle CPA$ 。

2. 設 x, y, z 為正實數且滿足 $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ ，

試證明： $\frac{x^3}{2+x} + \frac{y^3}{2+y} + \frac{z^3}{2+z} \geq 1$ 。

三、申論題（每題 12 分，共 24 分）

1. 現今 AI 科技盛行，已應用至各行各業，欲從事數學教學工作者，更須了解如何在教育上運用 AI 軟體。請就你(妳)的觀點，具體敘述在數學科教學上及學生的學習如何運用 AI 軟體協助，以增進教師教學及學生學習成效。

(12 分)

2. 在二次曲線的教學中，學生對於「橢圓」的長軸與短軸通常能有直觀的幾何感受，因為它們具體對應了橢圓圖形的長度與寬度。然而，在進入「雙曲線」單元時，學生經常對「共軛軸」與「漸近線」的概念感到十分抽象與虛幻。請依序回答下列問題：

(1) 請說明你會如何跟學生解釋雙曲線共軛軸的概念，並說明如何在給定的雙曲線中畫出其共軛軸並定義共軛軸長。(6 分)

(2) 設計一段教學引導讓學生可以感受到雙曲線的漸近線(6 分)

① 為什麼雙曲線向外延伸時，會越來越「貼近」這兩條直線(漸近線)？

② 為什麼雙曲線永遠「不會碰到」這兩條直線(漸近線)？

裕豐公用