國立臺灣師範大學附屬高級中學 115 學年度第 1 次專任教師甄選數學科筆試〔答案卷 P1〕

一、選填題：（每題 5 分，共 80 分。填在答案卷上，分數或根式須以最簡形式回答，否則不予計分）

A. $(4,4)$	B. 229	C. $\frac{\pi}{4}$	D. -36
E. $\frac{2\sqrt{66}}{33}$	F. 32	G. $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$	H. 16
I. 16	J. $\frac{113}{2}$	K. $\frac{18}{7}$	L. 886
M. $(5,24)$	N. -8	O. $\frac{64}{27}$	P. 506

二、非選題：（每題 10 分，共 20 分。請用黑色或藍色原子筆寫在答案卷上，須詳細過程，否則酌予扣分）

Q. 某學生解一道題目「已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{3n+2}=5$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n-a_n}{2a_n+3}$。」解法如下：

因為 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{3n+2}=5$，所以 $a_n=5(3n+2)=15n+10$，

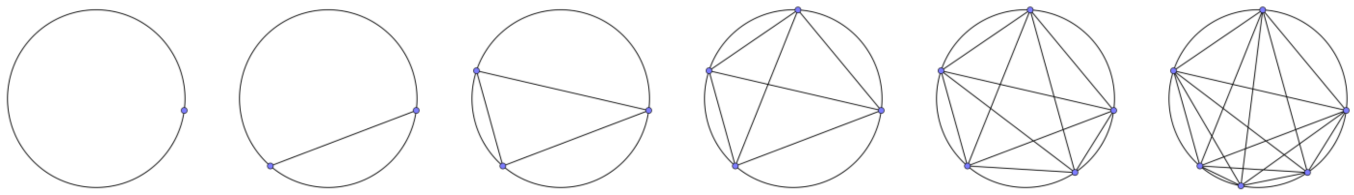
故所求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n-a_n}{2a_n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n-(15n+10)}{2(15n+10)+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-11n-10}{30n+23}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-11-\frac{10}{n}}{30+\frac{23}{n}}=\dfrac{-11-0}{30+0}=\dfrac{-11}{30}$。

問該學生解法過程有無錯誤？若有，請指出錯誤與如何對學生說明，並給出正確解法。若無，請給出另一種做法。

有錯。$a_n=5(3n+2)$ 不一定成立，比如 $a_n=5(3n+2)+c$ (c 為常數)，同樣能得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{3n+2}=5$。

正解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n-a_n}{2a_n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{4n}{3n+2}-\frac{a_n}{3n+2}}{2\cdot\frac{a_n}{3n+2}+\frac{3}{3n+2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{4}{3+\frac{2}{n}}-\frac{a_n}{3n+2}}{2\cdot\frac{a_n}{3n+2}+\frac{\frac{3}{n}}{3+\frac{2}{n}}}=\dfrac{\frac{4}{3+0}-5}{2\cdot5+\frac{0}{3+0}}=\dfrac{-11}{30}$。

R. 在翰林版課本第二冊數列級數的單元中提到，一個圓上有 n 個點互相連成線段之後，將圓的內部分割成最多 a_n 個區域；



$a_1=1$　　$a_2=2$　　$a_3=4$　　$a_4=8$　　$a_5=16$　　$a_6=?$

某生在觀察前五項的規律之後，推測一般式 $a_n=2^{n-1}$，試問此結果正確還是錯誤？若正確請證明；若錯誤，請找出正確的一般式，並解釋之。

<解>

1. 錯誤
2.

$$a_n=C_0^n+C_2^n+C_4^n$$
$$=\frac{1}{24}\left(n^4-6n^3+23n^2-18n+24\right)$$

[推法 1]

由平面的歐拉公式(Euler's Formula)：$V-E+F=1$，其中 V 為頂點數，E 為邊數，F 為面數(不包含圖形之外無限大的那一個面)

1. 計算 V：

已知每 4 個點可以在內部生成一個交點，即有 C_4^n 個內部點，故共有 $n+C_4^n$ 個點

2. 計算 E：

圓上 n 個點可以分出 n 條弧，並連出 C_2^n 條弦

又一個內部點是由兩條弦交叉得到，所以一個內部點會將兩條弦分割成 4 段，故內部點有 C_4^n 個，能分出 $2C_4^n$ 條線段

故 $E=n+C_2^n+2C_4^n$

3. 帶入歐拉公式(Euler's Formula)：$V-E+F=1$，得到 $F=1+E-V=1+\left(n+C_2^n+2C_4^n\right)-\left(n+C_4^n\right)=1+C_2^n+C_4^n$

[推法 2]

觀察遞迴關係

若圓上已有 n 個點依序為 $A_1,A_2,\ldots,A_n$，在 A_1 與 A_n 間加入新的點 A_{n+1}

則 A_{n+1} 與前 n 個點可以各連一弦，故有 n 條新弦

考慮這些新增的弦與其他弦的交點數量，形如 $\overline{A_kA_{n+1}}$，其中 $1\le k\le n$

由於 $\overline{A_kA_{n+1}}$ 兩側各有 $(k-1)$ 與 $(n-k)$ 個點，故在 $\overline{A_kA_{n+1}}$ 上會形成 $(k-1)(n-k)=-k^2+(n+1)k-n$ 個交點，故能生成 $-k^2+(n+1)k-n+1$ 個新的區域

故可以得到 $a_{n+1}=a_n+\sum_{k=1}^{n}\left(-k^2+(n+1)k-n+1\right)=a_n-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{(n+1)^2n}{2}-n^2+n$

$$=a_n+\frac{n^3-3n^2+8n}{6}=a_n+\frac{n^3-3n+2n}{6}+n=a_n+C_3^n+C_1^n$$

故遞迴關係：$\begin{cases}a_1=1\\ a_n=a_{n-1}+C_3^{n-1}+C_1^{n-1},n\ge 2\end{cases}$

故一般式 $a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}C_3^{k-1}+\sum_{k=1}^{n-1}C_1^{k-1}=1+C_4^n+C_2^n$