國立臺灣師範大學附屬高級中學 115 學年度
第一次專任教師甄選

數學科試題

── 作答注意事項 ──

考試時間：120 分鐘

- 考試開始前，請勿翻閱試題本與答案卷，違者將依本校試場相關規定處理。
- 本次考試作答共有答案卷 3 頁，請將各大題答案填入答案卷中，並不得要求額外增補。
- 請考生聽從監試老師之指示，並確認個人答案卷之甄選編號及姓名，如有錯誤應立即向監試老師反應。
- 除題目有特別說明，其他答案一律以藍色、黑色原子筆作答；更正時，可以使用修正帶(液)。
- 考試結束時，請將答案卷與試題本一起繳交，始可離開試場。

國立臺灣師範大學附屬高級中學 115 學年度第 1 次專任教師甄選數學科筆試〔題目卷 P1〕

一、選填題：（每題 5 分，共 80 分。填在答案卷上，分數或根式須以最簡形式回答，否則不予計分）

A. 已知 $21!$ 為 20 位數，計算出其值等於 $51090942171709ab0000$ ，其中 $a,b\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ，則 $(a,b)=$_____________。

B. 遊戲公司宣稱某稀有卡片每次能抽取到的機率達 2%，A 玩家不太認同，要進行合理性的檢定，選定幾何分布連續抽取到該稀有卡片為止，並決定顯著水準為 0.01 後，得到拒絕域為區間 $[n,\infty)$，其中 n 為自然數，則 $n=$_____________。

C. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+k^2}=$_____________。

D. 平面上，O 為原點，在 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的兩條漸近線上分別取點 A、B，使得 $\overline{OA}\times\overline{OB}=150$。若 P 為 $\overline{AB}$ 中點，且 P 點的軌跡方程式為 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=q$ 及 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=r$ ，則 $qr=$_____________。

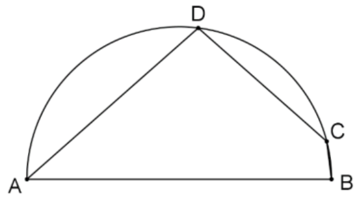
E. 設 $ABCD$ 為正四面體，若 P 、Q 、S 、R 分別為稜邊 $\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$ 、$\overline{DB}$ 、$\overline{DC}$ 上的分點，滿足 $\overline{AP}:\overline{PB}=\overline{AQ}:\overline{QC}=\overline{BS}:\overline{SD}=\overline{CR}:\overline{RD}=2:1$，令四邊形 $PQRS$ 與 ΔBCD 所夾的兩面角為 θ，試求 $\cos\theta=$_____________。

F. 設 $A(2,1,-2)$ 、$B(4,-1,-4)$ 為空間兩點，原點 $O(0,0,0)$ 與 $P(x,y,z)$ 在平面 $E:2x+2y-z=0$ 上且滿足 $\overline{OP}=1$，試求 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 的最小值為_____________。

G. 設三角函數 $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x+\sin^3 x+\cos^3 x+\sin^2 x+\cos^2 x$ ，令 $f(x)$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，試求 $M-m=$_____________。

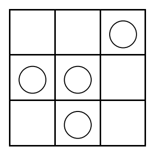
H. 令 m 、 n 為正整數，且 m 、 n 滿足 $\dfrac{m+n}{1+mn}=\dfrac{1}{64}$ ，試求 $\log_{\sqrt{2}}(m+n)$ 之最小值為_____________ 。

I. 一個半圓裡有個四邊形 $ABCD$，其中 $\overline{AB}$ 為直徑，且 $\overline{BC}=2$ ， $\overline{CD}=9$ ， $\overline{AD}=12$ ，求 $\overline{AB}$ 的長度為_____________ 。



J. 如圖， I 為 ΔABC 之內心， $\overline{IQ}\,//\,\overline{AB}$ ， $\overline{IP}\,//\,\overline{AC}$ ，若 $\overline{AB}=6$ ， $\overline{AC}=12$ ， $\overline{BC}=9$ ，試求 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=$_____________ 。

K. 在 3×3 方格紙的 9 個小格中心隨機選取 4 個分別標記一個記號○。考慮任一小格，若其緊鄰的小格(不含自己)恰有 2 格被標記，則得一分，累計 9 小格的總得分數為隨機變數 X，例：如圖，左下、中、上、右四小格各得 1 分，此時 $X=4$。試求 $E(X)=$_____________ 。



L. 空間坐標系中，欲從點 $A(3,0,0)$ 走捷徑前往點 $B(0,3,3)$ ，每次都只能沿著平行 x 軸、y 軸或 z 軸的方向移動一個單位。試問在不觸及平面 $E:2x+2y+z=4$ 的條件下，一共有_____________種走法。

M. 平面坐標上有三個圓 $C_1:(x+5)^2+y^2=16$ 、 $C_2:(x-5)^2+y^2=4$ 、 $C_3:(x-29)^2+(y-24)^2=4$ ，試問同時與此三個圓外切的圓心坐標為_____________ 。

N. 已知兩三次函數 $f(x)=x^3-x$ 與 $g(x)=(x-1)^3-(x-1)+2$ 的圖形有三條公切線，其中兩條公切線方程式分別為 $y=ax+b$ 、 $y=ax+c$ ，求 $abc=$_____________ 。

O. 圓Γ_1是ΔABC的外接圓，$\overline{AB}=8$、$\overline{BC}=7$、$\overline{CA}=6$，D為直線BC上一點，滿足直線AD與圓Γ_1相切於A點，圓Γ_2通過A、D兩點，且和直線BD相切於D點，圓Γ_1、圓Γ_2交於A、E兩點，則$\dfrac{\overline{EB}}{\overline{EC}}=$____________。

P. 數列$\langle a_n\rangle$滿足$a_0=1$，$a_{n+1}=\dfrac{7a_n+\sqrt{45a_n^{\,2}-36}}{2}$，$\forall n\in\mathbb{N}$，且$\langle F_n\rangle$為費波納契數列，滿足$F_1=F_2=1$，若$F_{2025}$恰為$\langle a_n\rangle$的第$m$項，則$m=$____________。

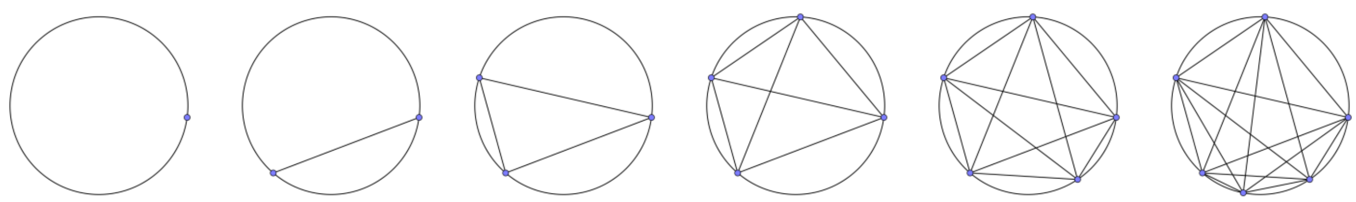
二、非選題：（每題 10 分，共 20 分。請用黑色或藍色原子筆寫在答案卷上，須詳細過程，否則酌予扣分）

Q. 某學生解一道題目「已知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{3n+2}=5$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n-a_n}{2a_n+3}$。」解法如下：

> 因為$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{3n+2}=5$，所以$a_n=5(3n+2)=15n+10$，
>
> 故所求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n-a_n}{2a_n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n-(15n+10)}{2(15n+10)+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-11n-10}{30n+23}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-11-\frac{10}{n}}{30+\frac{23}{n}}=\dfrac{-11-0}{30+0}=\dfrac{-11}{30}$。

問該學生解法過程有無錯誤？若有，請指出錯誤與如何對學生說明，並給出正確解法。若無，請給出另一種做法。

R. 在翰林版課本第二冊數列級數的單元中提到，一個圓上有n個點互相連成線段之後，將圓的內部分割成最多a_n個區域；



$a_1=1$　$a_2=2$　$a_3=4$　$a_4=8$　$a_5=16$　$a_6=?$

某生在觀察前五項的規律之後，推測一般式$a_n=2^{n-1}$，試問此結果正確還是錯誤？若正確請證明；若錯誤，請找出正確的一般式，並解釋之。