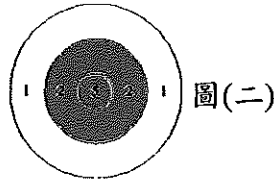
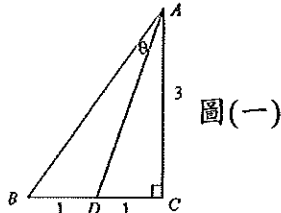


台北市立內湖高工 100 學年度數學教師甄選筆試試題

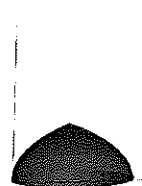
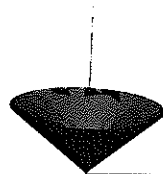
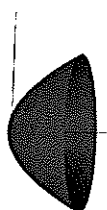
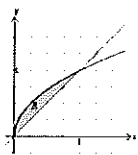
一、填充題 70% (每格 5 分)

- 若直線 $12x - 5y = 21$ 與二直線 $x = \frac{23}{39}$ 、 $x = \frac{16}{13}$ 分別交於 A 、 B 二點，則線段長 $\overline{AB} = \underline{(1)}$ 。
- 已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， D 在 \overline{BC} 線段上，且 $\overline{BD} = 1$ ， $\overline{DC} = 1$ ， $\overline{AC} = 3$ ， $\angle BAD = \theta$ ，如圖(一)所示。 $\tan \theta = \underline{(2)}$ 。



- 某甲玩射飛鏢遊戲，靶的最內層、中間、最外層的同心圓半徑分別為 3、9、15 公分，且所得分數分別為 5 分、2 分、1 分，如圖(二)所示。飛鏢落在靶外的機率是 $\frac{1}{26}$ ，且得 0 分。若飛鏢落在圓形靶上，則得到某分數的機率與該分數區域面積成正比。問某甲射出一隻飛鏢得到分數的期望值為 $\underline{(3)}$ 。
- 求正焦弦長為 $\frac{14}{3}$ ，兩焦點為 $(3, -3)$ 、 $(3, 5)$ 的雙曲線方程式為 $\underline{(4)}$ 。
- 設 $|\vec{a}| = 2$ ， $|\vec{b}| = 3$ ， $|\vec{c}| = 5$ ，且 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ 。求 $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = \underline{(5)}$ 。
- 設 $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}}$ ，若 $f(a) = 3$ ， $f(b) = 4$ ，則 $f(a+b) = \underline{(6)}$ 。
- 若 $(\sin 100^\circ + i \cos 100^\circ)^{21} = a + bi$ ，則 $(a, b) = \underline{(7)}$ 。
- 設 $\triangle ABC$ 的邊長分別為 a 、 b 、 c 。若 $\triangle ABC$ 外接圓的面積為 25π ，內切圓的面積為 4π ，則 $\frac{abc}{a+b+c} = \underline{(8)}$ 。
- 設 $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 6x + 4$ ，則 $f(x)$ 除以 $(x - \sqrt{2} - 1)$ 的餘式為 $\underline{(9)}$ 。
- 求 $C_2^9(-3)^2 + C_3^9(-3)^3 + C_4^9(-3)^4 + C_5^9(-3)^5 + C_6^9(-3)^6 + C_7^9(-3)^7 + C_8^9(-3)^8 + C_9^9(-3)^9 = \underline{(10)}$ 。
- 求由 $y = \sqrt{x}$ 與 $y = x$ 所圍成的區域 R ，繞下列直線旋轉一週所形成立體的體積。

- (a) x 軸 $\underline{(11)}$ (b) $y = 1$ $\underline{(12)}$ (c) y 軸 $\underline{(13)}$ (d) $x = 1$ $\underline{(14)}$



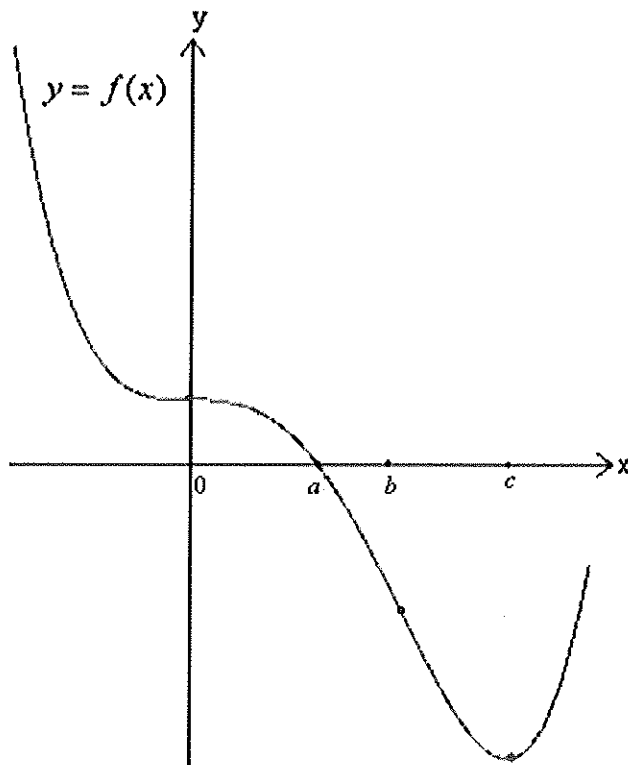
二、判斷下列敘述是否正確？若正確請證明，若錯誤請舉反例。20%
(每小題 5 分)

1. 已知對任意實數 x ， $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ 。若 $\lim_{x \rightarrow \infty} [h(x) - f(x)] = 0$ ，則 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ 存在。
2. 若 $f(x)$ 在 $(0, \infty)$ 連續且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0 (n \in \mathbb{N})$ ，則 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 (x \in \mathbb{R})$ 。
3. 設 a, b 為實數， $a \neq 0$ 且 $f(x) = ax^2 + bx + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ 。
若 $g(x) = x^2(ax^2 + bx + 1)$ ，則 $g''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ 。
4. 設 a, b 為實數， $a \neq 0$ 且 $f(x) = ax^2 + bx + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ 。
若 $g(x) = (ax^2 + bx + 1)^2$ ，則 $g''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ 。

(註 \forall : for all)

三、作圖 10%

1. 已知 $f(x)$ 為 4 次多項式函數， $y = f(x)$ 函數圖形如圖(三) 所示。請繪製 $y = f'(x)$ 的圖形。
(繪圖重點：函數值正負、增減、凹性)

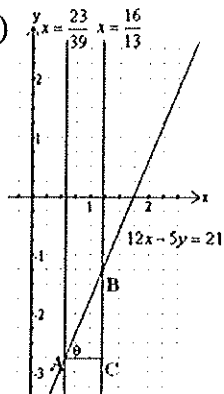


圖(三)

答案

一、填充題

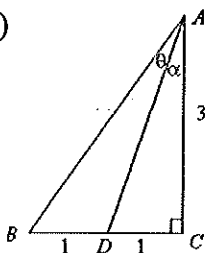
1. (1)



$$m = \tan(\angle BAC) = \frac{12}{5}, \quad \overline{AC} = \frac{16}{13} - \frac{23}{39} = \frac{25}{39}$$

$$\overline{AB} = \overline{AC} \sec \theta = \frac{25}{39} \cdot \frac{13}{5} = \frac{5}{3}$$

2. (2)



$$\tan(\theta + \alpha) = \frac{2}{3} = \frac{\frac{1}{3} + \tan \alpha}{1 - \frac{1}{3} \tan \alpha}$$

$$\tan \theta = \frac{3}{11}$$

3. (3) $\frac{16}{26} \times 1 + \frac{8}{26} \times 2 + \frac{1}{26} \times 5 + \frac{1}{26} \times 0 = \frac{37}{26}$

4. (4) $\frac{2b^2}{a} = \frac{14}{3}$ and $a^2 + b^2 = c^2 = 16$

$$\therefore a = 3, b = \sqrt{7}$$

從兩焦點 $(3, -3), (3, 5)$ 得知

$$\text{雙曲線方程式為 } \frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{7} = 1$$

5. (5) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = 4 + 9 + 25 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 0$, $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = -19$

6. (6) $\frac{2^a + 2^{-a}}{2^a - 2^{-a}} = 3$, $2^a = 2 \cdot 2^{-a}$

$$\frac{2^b + 2^{-b}}{2^b - 2^{-b}} = 4, \quad 2^b = \frac{5}{3} \cdot 2^{-b}, \quad 2^{a+b} = \frac{10}{3} \cdot 2^{-a-b}$$

$$f(a+b) = \frac{2^{a+b} + 2^{-a-b}}{2^{a+b} - 2^{-a-b}} = \frac{13}{7}$$

7. (7) $(\sin 100^\circ + i \cos 100^\circ)^{21} = (\cos 10^\circ - i \sin 10^\circ)^{21} = (\cos 210^\circ - i \sin 210^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$$(a, b) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

8. (8) $\frac{r}{2}(a+b+c) = \Delta ABC \text{ 面積} = \frac{abc}{4R}$
 r 為內切圓的半徑， R 為外接圓的半徑
 所以 $\frac{abc}{a+b+c} = 2Rr = 2 \times 5 \times 2 = 20$

9. (9) 令 $x = \sqrt{2} + 1$ ，則 $(x-1)^2 = 2$
 因此可以得到 $x^2 - 2x - 1 = 0$
 而 $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 6x + 4 = (x^2 - 2x - 1)(x^2 - 4x + 5) + 9$
 所以 $f(x) = (x - \sqrt{2} - 1) = 9$

10. (10) $(1+x)^9 = C_0^9 + C_1^9 x + C_2^9 x^2 + \dots + C_9^9 x^9$
 令 $x = -3$ 代入
 $(-2)^9 = C_0^9 + C_1^9(-3) + C_2^9(-3)^2 + \dots + C_9^9(-3)^9$
 $C_2^9(-3)^2 + C_3^9(-3)^3 + \dots + C_9^9(-3)^9 = -512 - 1 + 27 = -486$

11. (11) $\pi \int_0^1 (x-x^2) dx = \frac{\pi}{6}$ (12) $\pi \int_0^1 ((1-x)^2 - (1-\sqrt{x})^2) dx = \frac{\pi}{6}$

(13) $2\pi \int_0^1 x(\sqrt{x}-x) dx = \frac{2\pi}{15}$ (14) $2\pi \int_0^1 (1-x)(\sqrt{x}-x) dx = \frac{\pi}{5}$

二、判斷

1. 錯誤，反例： $h(x) = \sin x + e^{-x}$ ， $g(x) = \sin x$ ， $f(x) = \sin x - e^{-x}$ 。

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \lim_{x \rightarrow \infty} [h(x) - f(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} 2e^{-x} = 0,$$

但 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ 不存在。

2. 錯誤，反例： $f(x) = \sin(\pi x)$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \mathbb{N}}} \sin(n\pi) = 0$ ，但 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(\pi x)$ 不存在。

3. 錯誤，反例： $f(x) = x^2 - \frac{7}{4}x + 1$ ， $g''(x) = 12x^2 - \frac{21}{2}x + 2$ ， $g''(\frac{1}{2}) < 0$

4. 正確， $a > 0$ ， $ax^2 + bx + 1 > 0$ ， $g''(x) = 2[(ax^2 + bx + 1) \cdot 2a + (2ax + b)^2] > 0$

三、作圖 10%

1.

