臺北市立松山高中 115 學年度第一次教師甄選數學科初試試題

★請於答案卷上標明題號並作答。填充題僅須簡答，計算題及證明題須有完整之過程。

第壹部分：填充題(每題 5 分，共 60 分)

1. 坐標平面上，設區域 R 表示由聯立不等式 $\begin{cases} x-2y\le 0 \\ 2x-y\ge 0 \end{cases}$ 可行解所形成的區域，已知點 $P(1,0)$ 經過線性變換矩陣

$\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} & -\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}$ 連續變換 n 次後落在區域 R，試求最小可能正整數 n。

2. 已知正整數 $a, b\in\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 且不等式 $|x-a|+|x-b|\le 4$ 有實數解 x，試問這樣的正整數對 (a, b) 有多少個？

3. 坐標平面上，有三個點 $A(-1,0)$, $B(1,0)$, $P(\cos\theta, \sin\theta)$，其中 $0<\theta<\pi$。

又 P 點在 x 軸上的投影點為點 C，且點 D 不在 x 軸上。已知可以將 $\overrightarrow{DC}$ 寫成 $\overrightarrow{DA}$ 和 $\overrightarrow{DB}$ 的線性組合 $\overrightarrow{DC}=\alpha\overrightarrow{DA}+2\alpha\overrightarrow{DB}$，試求 $\tan\theta=$？

4. 坐標空間中，設直線 L_1: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-1}{-1}$，直線 L_2: $\begin{cases} 2x-3y-z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$，試求兩歪斜線 L_1 和 L_2 的距離。

5. 設**虛數** z 滿足 $|z|=3$，且在複數平面上 1 、z 、z^3 共線，試求 $z=$？

6. 設 $y=\sin x+2$ 的圖形、$y=\sin x+1$ 的圖形與直線 $x=0$、直線 $x=\pi$ 所圍成的區域繞 x 軸旋轉所得的旋轉體為 S，試求旋轉體 S 的體積。

7.魔術師在魔術表演中將寫有數字 1 至 100 的 100 張相異數字的牌分別放入紅、藍、綠三個盒子中，且每個盒子都至少有一張牌。觀眾從任意兩個不同的盒子中各取出一張牌，並將這兩張牌上的數字和告訴魔術師。問共有________種放牌的方法，使得魔術師在任何情況下都能正確判斷出哪一個盒子沒有被選中？

<答案> 12

<參考解析>

1° 分成 $3k, 3k+1, 3k+2 \Rightarrow 3!=6$ 種

2° 分成$1,2\sim 99,100 \Rightarrow 3!=6$種

因此共計有 12 種方法。

8. 甲、乙兩人依"甲乙甲乙…"的順序輪流擲一公正硬幣，規定擲出正面者得 1 分，反面得 0 分。在已知擲完第三次時(甲和乙總共投擲三次)，甲得分領先乙的條件下，則擲完第六次時，甲與乙最後總得分相等的機率為______。

<答案> $\dfrac{5}{16}$

<參考解析>

令 A 為"擲完第三次時甲領先乙"的事件，B 為" 擲完第六次時，甲與乙總得分相等"的事件

$P(A)=P$(甲得 2 分且乙得 1 分) + P(甲得 2 分且乙得 0 分) + P(甲得 1 分且乙得 0 分)

$=(\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{2})^3+2\times(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{2}$　　因此符合 $A\cap B$ 的情形有：

前三次得分	後三次得分	機率
甲得 2 分，乙得 1 分	甲得 0 分，乙得 1 分	$\frac{1}{8}\times 2\times(\frac{1}{2})^3=\frac{2}{64}$
	甲得 1 分，乙得 2 分	$\frac{1}{8}\times(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{64}$
甲得 2 分，乙得 0 分	甲得 0 分，乙得 2 分	$\frac{1}{8}\times(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{64}$
甲得 1 分，乙得 0 分	甲得 0 分，乙得 1 分	$\frac{2}{8}\times 2\times(\frac{1}{2})^3=\frac{4}{64}$
	甲得 1 分，乙得 2 分	$\frac{2}{8}\times(\frac{1}{2})^3=\frac{2}{64}$

所以 $P(A\cap B)=\dfrac{2+1+1+4+2}{64}=\dfrac{10}{64}=\dfrac{5}{32}$　　得所求為 $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{5}{32}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{5}{16}$。

9. 已知a,b,c,d 為 $x^4+x^3+1=0$ 的四個根，求$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & d \end{vmatrix}$之值為__________。

<答案> -4

<參考解析>

令$\begin{cases} a'=a-1 \\ b'=b-1 \\ c'=c-1 \\ d'=d-1 \end{cases}$為$\left(x+1\right)^4+\left(x+1\right)^3+1=x^4+5x^3+9x^2+7x+3=0$之四根

由根與係數得$\begin{cases} a'b'c'd'=3 \\ a'b'c'+a'b'd'+a'c'd'+b'c'd'=-7 \end{cases}$

故 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b'+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c'+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & d'+1 \end{vmatrix}$ $=a'b'c'd'+a'b'c'+a'b'd'+a'c'd'+b'c'd'=3-7=-4$ 。

10. 若兩實數 α 與 β 滿足方程組 $\begin{cases} \alpha^3-6\alpha^2+13\alpha-2030=0 \\ \beta^3+15\beta^2+76\beta+2150=0 \end{cases}$，則 $\alpha+\beta$ 之值為________。

<答案> -3

<參考解析>

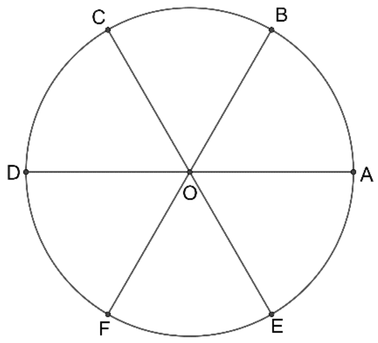
將原方程組 $\begin{cases} \alpha^3-6\alpha^2+13\alpha-2030=0 \\ \beta^3+15\beta^2+76\beta+2150=0 \end{cases}$ 轉化得 $\begin{cases} (\alpha-2)^3+(\alpha-2)-2020=0 \\ (\beta+5)^3+(\beta+5)+2020=0 \end{cases}$ （*）

令函數 $f(x)=x^3+x$，則易知 $f(x)$ 為嚴格遞增的奇函數

由（*）式得 $f(\alpha-2)=2020$ 與 $f(\beta+5)=-2020 \Rightarrow f(-(\beta+5))=2020$

所以 $f(\alpha-2)=f(-(\beta+5))=2020$，即知 $\alpha-2=-(\beta+5)$，故 $\alpha+\beta=-3$。

11.若使用紅、黃、藍三種顏色著下圖六個扇形區域，滿足著紅色的區域與著藍色的區域不相鄰，則有______種著色方法。



<答案> 199

<參考解析>

可將原問題轉換成使用紅、黃、藍三種顏色著 1×7 的方格，滿足著紅色的區域與著藍色的區域不相鄰且第一個格子和第七個格子的著色相同。

針對滿足著紅色的區域與著藍色的區域不相鄰的限制，使用樹狀圖如下：

令 R_n 表前 n 個格子著好且第 n 個格子著紅色的方法數；

Y_n 表前 n 個格子著好且第 n 個格子著黃色的方法數；

B_n 表前 n 個格子著好且第 n 個格子著藍色的方法數；

由著色限制可得遞迴式：$R_n=R_{n-1}+Y_{n-1},\ Y_n=R_{n-1}+Y_{n-1}+B_{n-1},\ B_n=Y_{n-1}+B_{n-1}$ 。

(1)第一個格子著紅色(即 $R_1=1,Y_1=0,B_1=0$)：

根據遞迴式可得 $R_2=1,Y_2=1,B_2=0 \Rightarrow R_3=2,Y_3=2,B_3=1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow R_7=50,Y_7=70,B_7=49$ 。

因為第一個格子和第七個格子的著色相同，故有 50 種著色方法。

(2)第一個格子著黃色(即 $R_1=0,Y_1=1,B_1=0$)：

根據遞迴式可得 $R_2=1,Y_2=1,B_2=1 \Rightarrow R_3=2,Y_3=3,B_3=2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow R_7=70,Y_7=99,B_7=70$ 。

因為第一個格子和第七個格子的著色相同，故有 99 種著色方法。

(3)第一個格子著藍色(即 $R_1=0,Y_1=0,B_1=1$)：

根據遞迴式可得 $R_2=0,Y_2=1,B_2=1 \Rightarrow R_3=1,Y_3=2,B_3=2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow R_7=49,Y_7=70,B_7=50$ 。

因為第一個格子和第七個格子的著色相同，故有 50 種著色方法。

結合(1)(2)(3)共有 $50+99+50=199$ 種著色方法。

12. 已知一個五位數 N(10000~99999，共計 90000 個數字)，若此五位數 N 恰包含至少一個數字 3，且恰為 3 的倍數，例如:63396,12360,66603,33333，則此種五位數 N 共有________個可能值。

<答案> 12504

<參考解析>

分成下列五類分組情形討論計數: (先將數字 3 由右而左依據第一次出現的位置可依序分成 A 、B、 C 、D 、E 等 5 類)

(A 類)	萬	千	百	十	個	+(B 類)	萬	千	百	十	個+(C 類)	萬	千	百	十	個+ (D 類)	萬	千	百	十	個	(E 類)	萬	千	百	十	個
					3					3				3				3					3				

$\mathbf{3\times10\times10\times10\times1}+\quad\mathbf{3\times10\times10\times1\times9}+\quad\mathbf{3\times10\times1\times9\times9}\quad+\mathbf{3\times1\times9\times9\times9}+\mathbf{1\times3\times9\times9\times9}$

合計 3000+2700+2430+2187+2187=12504。

第二部份 :計算證明題 (每題 10 分，共 40 分)

1. 設 $f(x)$ 為一定義在非零實數上的實數值函數，已知極限 $\lim_{x\to0} f(x)\frac{|x|}{x}$ 存在，試判斷下列選項是否正確？若是請證明之，若否請舉反例並驗證之。

(1) $\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{|x|}\right)^2$ 存在

(2) $\lim_{x\to0} f(x)\frac{x}{|x|}$ 存在

(3) $\lim_{x\to0}\left(f(x)+1\right)\frac{x}{|x|}$ 存在

(4) $\lim_{x\to0} f(x)$ 存在

(5) $\lim_{x\to0}\left(f(x)\right)^2$ 存在

2. 試利用極限的 ε-δ 定義，證明 $\lim_{x\to3} x^2=9$。

3.設 ΔABC 的三邊長 a,b,c 均為小於 100 正整數，已知 $\angle A=2\angle B$ 且此三角形的周長為 231，試求滿足題目所述條件的三角形之三邊長分別為何?

<參考解析>

$\because\ \angle A=2\angle B\ \ \therefore\ \sin A=\sin 2B=2\sin B\cos B$

$\Rightarrow \sin^2 A = 4\sin^2 B\cos^2 B$

$= 4\sin^2 B(1-\sin^2 B)$

$= \sin B(4\sin B - 4\sin^3 B)$

$= \sin B(\sin B + \sin 3B)$

$= \sin B(\sin B + \sin C),\ (\because \sin C = \sin(180^\circ - 3B) = \sin 3B)$

因此 $\sin^2 A = \sin B(\sin B + \sin C)$ 。根據正弦定理，可得 $a^2 = b(b+c)$ 。

因此，$a^2 = b(231-a) \Rightarrow b = \dfrac{a^2}{231-a}$ 。

設 $k = b + c = 231 - a$ ，因為兩邊和大於第三邊且 $a > b$

$231 = a + b + c > 2a \Rightarrow a \le 115$ 。

$231 - a = b + c < a + c < a + (b + a) < 3a \Rightarrow a \ge 58$ 。

$k = 231 - a \Rightarrow 116 \le k \le 173$ 。

故 $b = \dfrac{a^2}{231-a} = \dfrac{(231-k)^2}{k} = k - 462 + \dfrac{231^2}{k}$ 。

因為 $231 = 3\times 7\times 11 \Rightarrow k = 121, 147$ 。

當 $k = 121 \Rightarrow a = 110, b = 100, c = 21$ (不合)；當 $k = 147 \Rightarrow a = 84, b = 48, c = 99$ 。

故滿足題目所述條件的三角形三邊長分別為 84,48,99。

4.試判斷對所有自然數 n ，$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$ 和 $\ln(n+1)$ 之間的大小關係，並運用數學歸納法加以證明。 (其中 ln 為自然對數)

解答: 對所有自然數 n ，$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} > \ln(n+1)$ 恆成立

證明: 1.可先證明出 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$ 。**<註解>**

2.再由 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$ 兩邊取 ln $\Rightarrow n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 \Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ 。

3 最後利用**數學歸納法**證明 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} > \ln(n+1)$

(1)當 $n=1$ 時，$1 > \ln 2$ ，原式成立

(2)設 $n=k$ 時原式成立，即 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k} > \ln(k+1)$

(3)當 $n=k+1$ 時 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1} > \ln(k+1)+\frac{1}{k+1} > \ln(k+1)+\ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right) = \ln((k+1)+1)$ 亦成立。

故對所有自然數 n ，$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)$ 恆成立。

註解:

證明

令 $x=\frac{1}{n}>0$。

則

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

兩邊同乘 n：

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1$$

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)$$

因此

$$\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)<1$$

兩邊取指數（使用 **Euler's number e）：

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<e$$