臺北市立松山高中 115 學年度第一次正式教師甄選初試
數學科 筆試試題卷

★請於答案卷上標明題號並作答。填充題僅須簡答，計算證明題須有完整之過程

第一部分：填充題(每題 5 分，共 60 分)

1. 坐標平面上，設區域 R 表示由聯立不等式 $\begin{cases} x-2y\le 0 \\ 2x-y\ge 0 \end{cases}$ 可行解所形成的區域，已知點 $P(1,0)$ 經過線性變換矩陣

10

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}$$ 連續變換 n 次後落在區域 R，試求最小可能正整數 n。

34 2. 已知正整數 $a, b \in \{1,2,3,4,5,6\}$ 且不等式 $|x-a|+|x-b|\le 4$ 有實數解 x，試問這樣的正整數對 (a,b) 有多少個？

$2\sqrt{2}$ 3. 坐標平面上，有三個點 $A(-1,0)$, $B(1,0)$, $P(\cos\theta, \sin\theta)$，其中 $0<\theta<\pi$。

又 P 點在 x 軸上的投影點為點 C，且點 D 不在 x 軸上。已知可以將 $\overrightarrow{DC}$ 寫成 $\overrightarrow{DA}$ 和 $\overrightarrow{DB}$ 的線性組合

$\overrightarrow{DC}=\alpha\overrightarrow{DA}+2\alpha\overrightarrow{DB}$，試求 $\tan\theta=$？

$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 4. 坐標空間中，設直線 L_1: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-1}{-1}$，直線 L_2: $\begin{cases} 2x-3y-z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$，試求兩歪斜線 L_1 和 L_2 的距離。

$-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{35}}{2}i$ 5. 設虛數 z 滿足 $|z|=3$，且在複數平面上 1、z、z^3 共線，試求 $z=$？

$4\pi+3\pi^2$ 6. 設 $y=\sin x+2$ 的圖形、$y=\sin x+1$ 的圖形與直線 $x=0$、直線 $x=\pi$ 所圍成的區域繞 x 軸旋轉所得的旋轉體為 S，試求旋轉體 S 的體積。

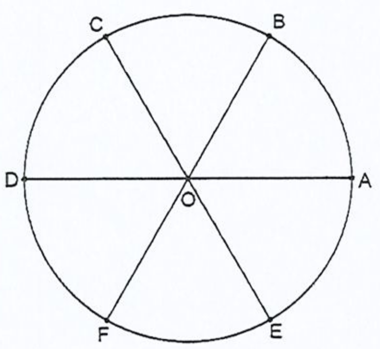
7. 魔術師在魔術表演中將寫有數字 1 至 100 的 100 張相異數字的牌分別放入紅、藍、綠三個盒子中，且每個盒子都至少有一張牌。觀眾從任意兩個不同的盒子中各取出一張牌，並將這兩張牌上的數字和告訴魔術師。問共有 12 種放牌的方法，使得魔術師在任何情況下都能正確判斷出哪一個盒子沒有被選中？

8. 甲、乙兩人依"甲乙甲乙…"的順序輪流擲一公正硬幣，規定擲出正面者得 1 分，反面得 0 分。在已知擲完第三次時(甲和乙總共投擲三次)，甲得分領先乙的條件下，則擲完第六次時，甲與乙最後總得分相等的機率為 $\frac{5}{16}$ 。

9. 已知 a,b,c,d 為 $x^4+x^3+1=0$ 的四個根，求 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & d \end{vmatrix}$ 之值為 -4 。

10. 若兩實數 α 與 β 滿足方程組 $\begin{cases} \alpha^3-6\alpha^2+13\alpha-2030=0 \\ \beta^3+15\beta^2+76\beta+2150=0 \end{cases}$ ，則 $\alpha+\beta$ 之值為 -3 。

11. 若使用紅、黃、藍三種顏色著下圖六個扇形區域，滿足著紅色的區域與著藍色的區域不相鄰，則有 199 種著色方法。



12. 已知一個五位數 N(10000~99999，共計 90000 個數字)，若此五位數 N 包含至少一個數字 3，且恰為 3 的倍數，例如:63396,12360,66603,33333，則此種五位數 N 共有 12504 個可能值。

第二部份 :計算證明題 (每題 10 分，共 40 分)

1. 設 $f(x)$ 為一定義在非零實數上的實數值函數，已知極限 $\lim_{x\to 0} f(x)\frac{|x|}{x}$ 存在，試判斷下列選項是否正確？若是請證明之，若否請舉反例並驗證之。

✓ (1) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{|x|}\right)^2$ 存在

✓ (2) $\lim_{x\to 0} f(x)\frac{x}{|x|}$ 存在

✗ (3) $\lim_{x\to 0}\left(f(x)+1\right)\frac{x}{|x|}$ 存在　　反例可取 $\frac{|x|}{x}$

✗ (4) $\lim_{x\to 0} f(x)$ 存在　　反例可取 $\frac{|x|}{x}$

✓ (5) $\lim_{x\to 0}\left(f(x)\right)^2$ 存在

證明略

(3) 須留意 $\lim_{x\to 0}(f(x)+1)\frac{x}{|x|}$ 及 $\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}$ 為不存在

因此過程中不可寫出

$\lim_{x\to 0}(f(x)+1)\frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0} f(x)\frac{x}{|x|} + \lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}$

2. 試利用極限的 ε-δ 定義，證明 $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$。

可取 $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{7}\right\}$

3. 設 ΔABC 的三邊長 a,b,c 均為小於 100 正整數，已知 $\angle A = 2\angle B$ 且此三角形的周長為 231，試求滿足題目所述條件的三角形之三邊長分別為何?

(84, 48, 99)

4. 試判斷對所有自然數 n，$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$ 和 $\ln(n+1)$ 之間的大小關係，並運用數學歸納法加以證明。 (其中 ln 為自然對數)

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\frac{1}{n} > \ln(n+1)$