高雄中學115年正式教師甄選數學科試題

※本份試卷共有15大題，每題皆為計算或證明題。

1. 方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$，

令$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$。

試證：若方程組之幾何意義為「三平面兩兩相交於一直線，且三直線互相平行」，

則$\Delta=0$ 且Δ_x、Δ_y、Δ_z 至少有一不為0。（6分）

2. 針對本題：

「$f(x)$是一個多項式函數，$\deg f(x)=1$ ，$1\le f(1)\le 4$，$-2\le f(2)\le 7$，求$f(3)$之範圍」。

請用兩種不同解法，求出本題的正確答案。(8分）

3. 已知$f(x)=\left(3x^5+2x^4-4x-2\right)^{115}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{115}x^{115}$

若$p=\sum_{k=0}^{57}a_{2k}$， $q=\sum_{k=0}^{57}(-1)^k a_{2k}$，$r=\sum_{k=0}^{28}a_{4k+1}$，$s=\sum_{k=0}^{28}a_{4k+3}$，試求數對$(p,q,r,s)$。(8分）

4. $a_n=\int_0^1 x^n(1-x)^2\,dx, n=1,2,3,...$ ，試求（1）$\sum_{k=1}^{n}a_k$ （2）$\lim_{n\to\infty} n^3\cdot a_n$。 （6分）

5. 已知三角形ABC的三邊長分別為a,b,c，且其外接圓半徑$R=\dfrac{a\sqrt{bc}}{b+c}$，

求此三角形三內角的餘弦值之和=? （6分）

6. 直角ΔABC中，$\angle BAC=90^\circ$，今$\overline{AB}$上一點D滿足$\angle ABC=2\angle ACD$且$\overline{BC}=2\overline{BD}$，若$\overline{AD}=1$，

求ΔBCD面積=? （6分）

7. 設$f(x)$和$g(x)$均為二次實係數多項式且$f(x)$的領導係數為1，$g(x)$的領導係數為4，

若$(f(x))^2$除以$g(x)$的餘式為$\dfrac{11x-15}{4}$；$(g(x))^2$除以$f(x)$的餘式為$28x-40$，求$f(x)=?$（6分）

8. 有八個學生在雄中司令臺圍坐一圈，今每人同時丟擲一個公正的硬幣一次(即出現正面和反面的機率皆為$\frac{1}{2}$)，試求沒有任相鄰二人皆擲出反面的機率=?（6 分）

9. 空間中，S 為以 $P(1,0,0)$ 為球心，半徑為1的球面，若 $Q(a,b,c)$ 為球面 S 上的動點，滿足 $a>1,b>0,c>0$，若過 Q 且與球面 S 相切的平面 E，分別與 x 軸、y 軸、z 軸交於點 A,B,C，試求 ΔABC 的最小面積=?（6 分）

10. 設 $a>0$，$f(x)=x^3+ax^2-a^2x$ 的圖形為 Γ，若 $f(x)$ 在 $x=b$ 有極小值，求過點 $(b,f(b))$ 且與 Γ 相切的切線與 Γ 所圍成的區域面積=?（以 a 表示）（6 分）

11. 求出所有的正整數 n，使得 $26+\sqrt{2026-n}$ 是一個完全平方數。（6 分）

12. 空間坐標中，點 (x,y,z)，滿足 x,y,z 皆為整數的點，稱為格子點。已知四面體 OABC 的四個頂點為 $O(0,0,0)$，$A(10,20,30)$，$B(20,20,30)$，$C(30,10,10)$，則在四面體 OABC 的內部或邊界上，有多少個格子點？（6 分）

13. 空間坐標中，A,B 兩點在某直線 L 的投影分別為 C,D。已知 $\overline{AC}=2$，$\overline{BD}=6$，且兩直線方程式分別為 $AC:\frac{x-7}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-5}{2}$ 與 $BD:\frac{x-1}{1}=\frac{y+7}{4}=\frac{z-1}{1}$，試求 $\overline{AB}$ 的長度=?（8 分）

14. 坐標平面上，已知 O 為原點，矩形 $OABC$ 的三個頂點 A,B,C 均在橢圓 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{3}=1$，試求矩形 $OABC$ 的面積=?（8 分）

15. 設 a,b,c,d 為正實數且滿足 $abcd=1$。

試證明：$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geq\sqrt{a+b}+\sqrt{c+d}$（8 分）