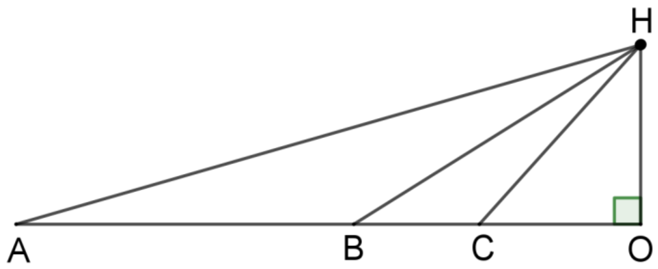
國立中央大學附屬中壢高級中學115學年度第1次教師甄選 數學科筆試題目卷

一、填充題:每題 7 分，共 84 分。

1. 如圖，在地平面的三點 A、B、C，分別測得大樓 $\overline{OH}$ 樓頂 H 的仰角依序為 θ、2θ、3θ。已知 $\overline{AB}=240$ 公尺，$\overline{BC}=90$ 公尺，求樓高 $\overline{OH}$ 為_____公尺。



2. 設 z 為複數且 $|z|=1$，若 $|z^2+iz+1|$ 的最大值為 a，最小值為 b，則數對 $(a,b)=$_____。

3. 若正數數列$\langle a_n\rangle$滿足$a_1=1$，且對於 $n\geq 2$ 時皆滿足 $\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}=\frac{a_n}{2n-1}$，其中 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，則 S_n 的一般項為_____。

4. 化簡 $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}=$ _____。

5. 有個半徑為 1 單位的圓及圓外一點 P，今由 P 點往此圓作兩條切線可得兩個切點 A、B，則 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值為_____。

6. 中壢觀光夜市有個遊戲攤位，其遊戲規則如下：
箱子中有編號 1~25 號的球各 1 顆，假設每顆球被抽到的機會相等，每局遊戲皆由箱中任抽兩球，若兩球的號碼在看板上同行或同列，則可以得到球號相對應的獎金！舉例來說，假設抽到 2 號與 17 號便可得 $2+17=19$ 元；倘若抽 2 號與 6 號就沒有獎金可以拿。今小馬壢參加此遊戲且只玩一次，則小馬壢所得獎金的期望值為_____。

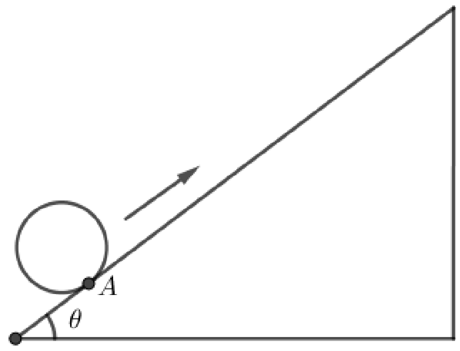
1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

7. 設 $f(x)$ 是定義在 $\mathbb{R}$ 上且週期為 4 的**偶**函數，當 $0\leq x\leq 1$ 時，$f(x)=1+\sqrt{1-x^2}$，而當 $2\leq x\leq 3$ 時，$f(x)=(x-4)^2$，試求：$\int_{-2}^{6}f(x)dx=$_____。

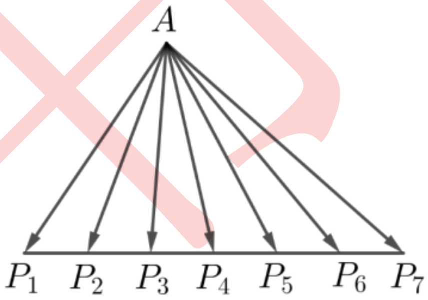
請繼續翻閱背面

8. 極限值 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+n^2+n^3+\cdots+n^n}{1^n+2^n+3^n+\cdots+n^n}=$＿＿＿。

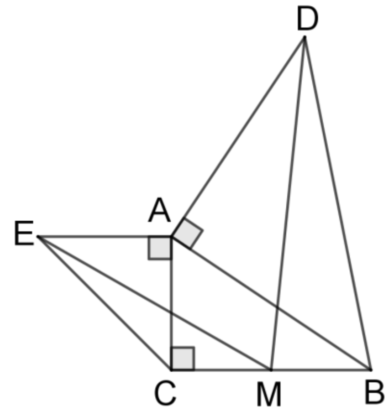
9. 有個半徑為 1 單位的圓以每秒 1.5 單位的速度將圓周沿著斜坡等速往上滾動。已知斜坡角度為 θ 且 $\tan\theta=\dfrac{3}{4}$。設點 A 為開始觀察時圓與斜坡的切點，經過 $\dfrac{14}{9}\pi$ 秒的移動後，點 A 距離地面的高度將增加＿＿＿單位。



10. 在平面上，點 $P_2, P_3, \ldots, P_6$ 為 $\overline{P_1P_7}$ 的等分點，且 $\overline{P_1P_2}=\overline{P_2P_3}=\cdots=\overline{P_6P_7}=2$，$\overline{AP_1}=6$，$\overline{AP_7}=8$，試求：$\overrightarrow{AP_1}\cdot\overrightarrow{P_1P_7}+\overrightarrow{AP_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_7}+\overrightarrow{AP_3}\cdot\overrightarrow{P_1P_7}+\cdots+\overrightarrow{AP_7}\cdot\overrightarrow{P_1P_7}=$＿＿＿。



11. 如圖，設 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^{\circ}$，以 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 分別向外作等腰直角三角形 ABD、ACE，點 M 是 $\overline{BC}$ 中點。若 $\overline{MD}=8$，$\overline{ME}=6$，則 $\overline{BC}=$＿＿＿。



12. 空間中有 $A(1,4,2)$、$B(3,4,4)$ 兩點，球面 S 通過 A、B 兩點，其球心 O 在平面 $5x-2y+5z=3$ 上。若平面 $E: x+y+z=19$ 截此球面 S 所得之截圓面積為 $F(S)$，則 $F(S)$ 的最小值為＿＿＿。

二、計算證明題：每題 8 分，共 16 分。

1. 設數列 $a_n=C_0^n+C_1^n+\cdots+C_n^n$，其中 $C_k^n=\frac{n!}{k!(n-k)!}$，則根據二項式定理可得 a_n 的一般項為 2^n。

   (1) 令 $b_n=1\cdot C_1^n+\cdots+k\cdot C_k^n+\cdots+n\cdot C_n^n$，試求 b_n 的一般項。(3 分)

   (2) 令 $d_n=1^2\cdot C_1^n+\cdots+k^2\cdot C_k^n+\cdots+n^2\cdot C_n^n$，試求 d_n 的一般項。(5 分)

2. 設 a 為整數且 $x^{13}+x+90$ 可分解為 x^2-x+a 與一個整係數多項式的乘積，則 a 的值為何？(8 分)