

臺中市立臺中女子高級中等學校 115 學年度第一次教師甄選 數學科 試題

說明：1.作答時，請將答案填入答案卷內。

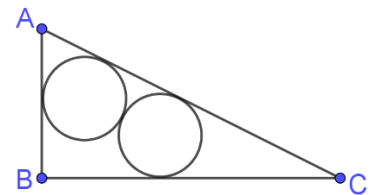
2.請利用試題卷空白處計算，不另提供計算紙。

一、填充題（每題 5 分，共 80 分）

1. 有大小相同的紅球、白球、黑球各 7 顆，若任意取出 7 顆球來排成一列，規定任兩顆紅球均不相鄰，則共有 _____ 種不同的排法。

2. 坐標平面上， O 為原點、 $A(7, 0)$ 、 $B(0, 4)$ ， M 、 N 分別為 x 軸與 y 軸正向上的動點。若 P 在 \overline{MN} 上， $\overline{PM} = 4$ 且 $\overline{PN} = 7$ ，則四邊形 $OAPB$ 面積的最大值為 _____。

3. 如右圖，直角三角形 ABC 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 5$ ， $\overline{BC} = 12$ ，有兩個大小相同的圓彼此相切，且各自跟三角形 ABC 的斜邊及一股也相切，則兩圓的外公切線段長為 _____。



4. 空間中有相異四點 A, B, C, D ，滿足 $\overline{AB} = 1$ ， $\overline{AC} = 2$ ， $\overline{AD} = 3$ 。若 $\angle BAC = 60^\circ$ ， $\angle CAD = 60^\circ$ ， $\angle DAB = 60^\circ$ ，則點 A 到平面 BCD 的距離為 _____。

5. 設兩數列 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ 的首項分別為 $a_1 = 5$ 、 $b_1 = 1$ ，且 $a_{n+1} = a_n + 2b_n$ ， $b_{n+1} = 2a_n + b_n$ ， n 為任意正整數，則一般項 $a_n =$ _____。

6. 使不等式 $|C_1^n(-3)^2 + 2C_2^n(-3)^3 + 3C_3^n(-3)^4 + \dots + nC_n^n(-3)^{n+1}| < 10^5$ 成立的最大正整數 n 為 _____。

臺中市立臺中女子高級中等學校 115 學年度第一次教師甄選 數學科 試題

7. 圓內接四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB}=2$ ， $\overline{BC}=3$ ， $\overline{CD}=4$ ， $\overline{DA}=5$ ，若 $\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AD}$ ，則數對 $(m,n)=$ _____。
8. 已知 $\triangle ABC$ 的三邊長為 $\overline{AB}=4$ ， $\overline{BC}=5$ ， $\overline{CA}=6$ 。若 H 為 $\triangle ABC$ 之垂心，則 $\overline{AH}=$ _____。
9. α, β, γ 為複數，在複數平面上對應的點分別為 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ ，滿足 $\alpha^2 + 3\beta^2 + 4\gamma^2 - 2\alpha\gamma - 6\beta\gamma = 0$ 及 $|\alpha - \beta| = 10$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積為_____。
10. 已知 $x > 1$ 且 $y > 4$ ，則 $\frac{y^2}{x-1} + \frac{x^2}{y-4}$ 之最小值為_____。
11. $\triangle ABC$ 的三邊長分別為 $\overline{AB}=4, \overline{BC}=7, \overline{CA}=6$ ， $\angle BAC$ 的內角平分線交 \overline{BC} 於 D ， \overline{AD} 的中垂線交 \overleftrightarrow{BC} 於 P 點，則 \overline{BP} 的長為_____。

臺中市立臺中女子高級中等學校 115 學年度第一次教師甄選 數學科 試題

12. 設實係數多項式 $f(x) = ax^3 + bx^2 - cx - d$ ，已知方程式 $f(x) = 0$ 的三個根分別為 $\cos \frac{2\pi}{7}$ 、 $\cos \frac{4\pi}{7}$ 、 $\cos \frac{6\pi}{7}$ ，則

$$20\log_2 a - 2\log_2 b - 6\log_2 c - 12\log_2 d = \underline{\hspace{2cm}}。$$

13. $\triangle ABC$ 中，若 $2\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{BA} \cdot \vec{BC}$ 且 $\cos C = \frac{2}{\sqrt{13}}$ ，則 $\tan A = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

14. 設 a 、 b 、 c 為實數且滿足
$$\begin{cases} 0 \leq a+b+c \leq 4 \\ -2 \leq 4a+2b+c \leq 2 \\ -4 \leq 9a+3b+c \leq 0 \end{cases}$$
。若 $a-2b+4c$ 的最大值與小值分別 M 與 m ，則數對

(M, m) 為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

15. 設 x 、 y 為兩實數，若 $x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$ ，則 $x^2 + y^2$ 的最大值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

16. 空間中有四個平面： $E_1: x+y+z=0$ 、 $E_2: x+y+z=6$ 、 $E_3: x+y+z=18$ 、及 $E_4: x-y+z=0$ ，若在平面 E_4 上有一正三角形 ABC ，而點 A 、 B 、 C 也分別在平面 E_1 、 E_2 、 E_3 上，則 $\triangle ABC$ 的面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

臺中市立臺中女子高級中等學校 115 學年度第一次教師甄選 數學科 試題

二、計算證明題（須詳細寫出計算過程，共 20 分）

1. 設 a 、 b 、 c 、 d 為實數且 $a \neq b$ ， $c \neq d$ ， $f(x)$ 、 $g(x)$ 為滿足 $f(a) = f(b)$ 及 $g(c) = g(d)$ 的實係數二次多項式。已知

$f(x) - g(x)$ 為常數多項式，試證明：

(1) $a + b = c + d$ 。(4 分)

$$(2) \frac{f(a) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{g(c) - g\left(\frac{c+d}{2}\right)} = \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^2 \text{。 (8 分)}$$

2. 試問方程式 $x + \sqrt{12 + 8(\log_4 x^2) - 4(\log_4 x^2)^2} = 1$ 共有幾個不同的實根？(8 分)