國立中興大學附屬高級中學 115 學年度第 1 次正式教師甄試　數學科試題卷

本試題共有兩部分：填充題十題(每題 6 分，共 60 分)、計算題四題(每題 10 分，共 40 分)，滿分總計為 100 分。**限使用黑色筆或藍色筆書寫，不可使用鉛筆。**

第壹部分、填充題(共 10 題，占 60 分)

說明：(1) 第1題至第10題，請將答案填寫在答案卷的指定題號格位上，不須要書寫過程。
(2) 每題完全答對給6分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。若有擦拭請保持答案之清晰，若造成無法判斷書寫的答案，則不予計分，由考生自負責任。
(3) 若答案為分數，皆須化為最簡分數；若答案內有根號，皆須化為最簡根式。

1. 設 z 為複數且 $|z|=1$，求 $|z^2+2z-2|$ 的最大值=______。

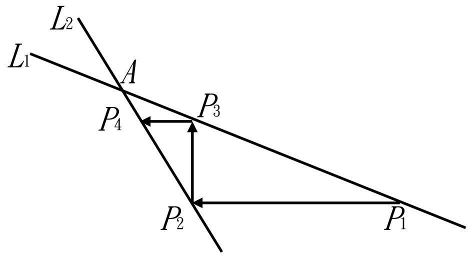
2. 已知多項式 $f(x)=(x^2+x+1)^5$ 展開後為 $a_{10}x^{10}+a_9x^9+a_8x^8+\cdots+a_1x+$ 。
則 $11a_{10}+10a_9+9a_8+\cdots+2a_1+a_0$ 的值為 ______。

3. ΔABC 中，已知 $\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}=54$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=10$，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=90$，則 ΔABC 的面積為 ______。

4. 求滿足方程式 $\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{2x^2+x+5}=\sqrt{x^2-3x+13}$ 的正實數 x=______。

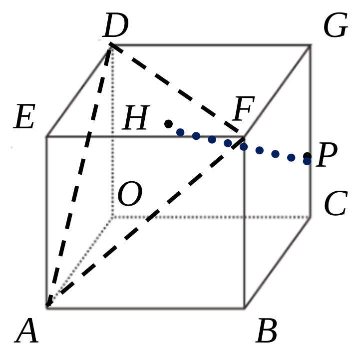
5. 從正整數 1，2，3，…，n 中任取相異的兩數相乘，若這 $\frac{n(n-1)}{2}$ 個乘積的算術平均數為 55，則 n 值為 ______。

6. 如右圖所示，二直線 $L_1: x+3y=k_1$ 與 $L_2: 2x+y=k_2$ 相交於 A 點。在 L_1 上一點 P_1 向左走 60 單位到 L_2 上的 P_2 點；再從 P_2 向上走到 L_1 的 P_3 點，再從 P_3 向左走到 L_2 上的 P_4 點；依此規則持續走下去，在 L_1 上得到 P_1，P_3，P_5，⋯，在 L_2 上得 P_2，P_4，P_6，⋯，則 $\sum_{k=1}^{\infty}\overline{P_kP_{k+1}}=$________。



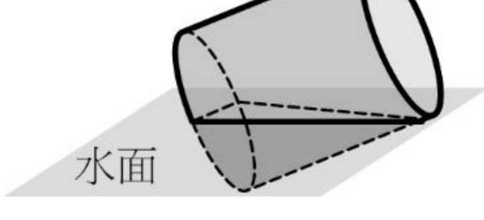
7. 設有甲、乙、丙、丁四台電腦，利用擲一顆公正骰子的方式決定任意兩台電腦是否要連線：若出現奇數點數，則此兩台電腦連線；若出現偶數點數，則此兩台電腦不連線。已知每個傳到其中一台電腦的訊息會同時傳到其它和這台有連線的電腦。求甲、乙、丙、丁四台電腦的每台電腦都能夠從其它所有電腦收到訊息的機率=________。

8. 坐標空間中有一個稜長為 1 的正立方體 O*ABC-DEFG*，示意圖如右圖。P 點在 $\overline{CG}$ 上，且 $\overline{CP}:\overline{PG}=1:2$，若 P 點在平面 ADF 上的投影點為 H 點，求 H 點到平面 $OABC$ 的最短距離=________。



9. ΔABC 中，已知 $\overline{BC}$=6，且 $\overline{AB}$=2$\overline{AC}$，當 ΔABC 面積有最大值時，則 $\cos A=$________。

10. 有一底面半徑為 3 公分且密度不均勻的圓柱體，傾斜漂浮在靜止的水平面上，水面剛好通過底面直徑且與底面成 45°角，示意圖如右。求此圓柱體在水面下的立體體積為________立方公分。(圓周率=π)



第貳部分、計算題(共 4 題，占 40 分)

說明：(1) 第一題至第四題，限使用黑色筆或藍色筆在答案卷的指定題號內作答(不可使用鉛筆書寫)。請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分，只寫答案不予計分。若有擦拭請保持完整清晰，造成無法判斷書寫的部分，則不予計分，由考生自負責任。
(2) 若答案為分數，皆須化為最簡分數；若答案內有根號，皆須化為最簡根式。

一、設 a、b、c 為正實數，且滿足 $a+b+c=4$，試求 $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2+(c+\frac{1}{c})^2$ 的最小值。

二、某租借站的車輛借用狀況遵循以下規則：若當天有車，隔天無車的機率為 $\frac{1}{4}$；若當天無車，隔天無車的機率為 $\frac{1}{2}$。假設第 1 天該站有車可借，我們觀察該站的每日車輛狀況序列，定義隨機變數 X 為滿足以下條件的最小正整數：第 X 天與第 $X+1$ 天皆無車可借。試求 X 的期望值。

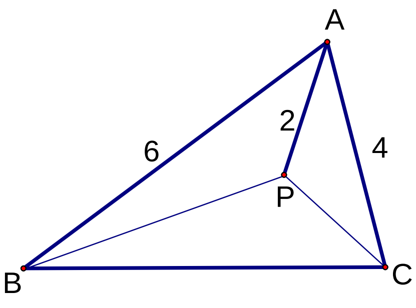
三、設 ΔABC 的內部一點 P，已知 $\overline{AB}=6,\ \overline{AC}=4,\ \overline{AP}=2$，$\angle BAC=60^\circ$，

且點 P 在 $\angle BAC$ 的平分線上，如右圖所示。試回答下列問題：

(1)求向量內積 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=$？ (4 分)

(2)若點 K 滿足 $\overrightarrow{AK}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AP}+z\overrightarrow{AC}$，其中 $x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,$

且 $x+y+z=1$，求動點 K 所成的集合之面積？ (6 分)



四、設對所有的正數 x，$f(x)$ 滿足 $f(3x)=3f(x)$，且函數 $f(x)$ 在 $1\leq x\leq 3$ 時滿足 $f(x)=1-|x-2|$，則

(1) 求 $f(2026)$ 之值？ (4 分)

(2) 求滿足 $f(x)=f(2026)$ 的最小正數 $x=$？ (6 分)