新竹市立成德高級中學 115 學年度正式教師甄試高中數學科題目試卷

1. 本份試卷**不可使用**計算機。
2. 考試完畢，請交回所有試卷及計算紙並在題目卷右上角寫上准考證號碼。

本試卷共 2 頁

以下答案皆為填充題，無須計算過程，須於答案卷上清楚書寫答案。答案須化為**最簡分數**或**有理化**，答案須**完全正確**才給分。

第一部份　填充題（每題 6 分），共 60 分

1. 在ΔABC中，$\overline{AB}=3,\ \overline{AC}=4,\ \overline{BC}=5$，$I$為$\Delta ABC$的內心，$P$為$\Delta IBC$ (包括邊界)內的一點，若 $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}\ (\alpha,\beta\in R)$，則$\alpha+\beta$的最小值為____________。

2. 分別執行A、B兩個伯努利試驗(Bernoulli trial)，每次成功機率依序分別為a、b。若各執行n次，得A的成功次數期望值恰為B的5倍、A的成功次數標準差恰為B的2倍，求$(a,b)=$______。

3. 坐標平面上有一平行四邊形Γ，其中兩邊所在的直線與$5x-2y=0$平行、另兩邊所在的直線與$8x-7y=0$垂直。令Γ的兩對角線交點為Q。已知Γ有一頂點P，滿足$\overrightarrow{PQ}=(5,-1)$，則$\Gamma$的面積為________。

4. 在空間中，6個平面$E_1：2x+y+z=0$、$E_2：2x+y+z=1$、$E_3：x+2y+z=0$、$E_4：x+2y+z=2$、$E_5：x+y+2z=1$、$E_6：x+y+2z=3$所圍成的平行六面體體積為______。

5. 甲乙兩人比賽桌球，約定比賽進行到打滿 6 局或有一人比另一人多贏 2 局時，比賽即終止。設每局均無平局，已知甲在每局中獲勝的機率均為$\frac{1}{4}$，且各局勝負互不影響。求比賽結束時，已賽局數的期望值為______。

6. 設函數$y=\dfrac{\sin 2x-3}{\sin x+\cos x-2}$的最大值為$M$，最小值為$m$，則$M-m=$____________。

7. 設x為正數，已知$f(x)=x^2+2x+3+\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2}$，求$f(x)$最小值為__________。

8. 坐標平面上，有一P點先以原點O為中心逆時針旋轉70°，再對直線$L：(\sqrt{3}-1)x-(\sqrt{3}+1)y=0$做鏡射，其結果相當於$P$點直接對於直線M：$y=(\tan\theta)x$做鏡射，其中$0^\circ\le\theta\le180^\circ$，求$\theta$之度數為______。

9. 在數列$\langle a_n \rangle$中，當$1 \le n \le 5$時，$a_n = n^2$，且對所有正整數n，$a_{n+5} + a_{n+1} = a_{n+4} + a_n$均成立，則$a_{2031} =$_____。

10. 設x為實數，試解$2^x + 4^x + 8^x = 39$，$x =$ ____________。

第二部份　填充題（每題 8 分），共 40 分

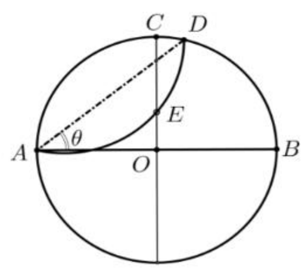
1. 請問數列$\left[\frac{1^2}{2026}\right]$，$\left[\frac{2^2}{2026}\right]$，$\left[\frac{3^2}{2026}\right]$，$\cdots$，$\left[\frac{2026^2}{2026}\right]$中共有________個相異整數。

2. 已知a,b是正實數，若方程式$x^2 + 2ax + 16b = 0$和$x^2 + 2bx + 2a = 0$均有實數根，則$a^2 + b^2$的最小值為______。

3. 試求級數$\sum_{n=1}^{2026} (-1)^n \frac{n^2 + n + 1}{n!}$之值為________。

4. 設複數z滿足$\frac{2026z - 4}{z - 2026} = 1 - \sqrt{3}i$，則$|z| =$____________。

5. 右圖是一張圓形的紙張，半徑為 1，圓心為O，$\overline{AB}$是直徑，$\overline{OC}$是垂直$\overline{AB}$的半徑，E是$\overline{OC}$上一點滿足$\overline{OE} = \frac{1}{3}$，沿某條折線$\overline{AD}$對摺，使得弧$AD$上某一點與$E$重合。
則$\tan \angle OAD =$_________。



試題結束